Abels teorem (7.28)

Hvis $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ konvergerer og vi setter $f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k x^k$

så vi $\lim_{x \to 1-} f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k = f(1)$

– vi har konvergens av potensrekka $\sum_{k=1}^{\infty} a_k x^k$ for $x = 1 = x_1$ slik at oppgave 7.1.14 gir konvergens i $\langle -1, 1 \rangle$ og nå iflg. forutsetningen også for $x = 1$ dvs. konvergens i $\langle -1, 1]$ og vi har uniform i hvert lukket delintervall av $\langle -1, 1 \rangle$ og der er da

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k x^k$$

Kontinuerlig.

Det Abels teorem sier er (2)
at
$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k x^k$$
er kontinuerlig i $\langle -1, 1]$

Et trixete bevis etter ideer fra Dirichlet/Dedekind står side 276

To eksempler.

Ønsker å finne
$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots = \sum_{k=1}^{\infty} a_k = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k}$$
som vi vet konvergerer iflg. alternerende rekke der absoluttverdien går mot null.
$$x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \cdots = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k} x^k$$
$$= f(x) = \ln(1+x)$$
Abels teorem sier at
$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots = f(1) = \underline{\ln 2}$$
ser på
$$1 - x + x^2 - x^3 + \cdots = \frac{1}{1+x}$$
integrasjon gir
$$x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \cdots = \int \frac{1}{1+x} dx = \ln(1+x)$$