

Algebra $a, b, c, x \in \mathbb{R}$

- 1. Kvadratsetning: $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$
- 2. Kvadratsetning: $(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$
- Konjugatsetningen: $(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$
- Andregradslikningen: $ax^2 + bx + c = 0 \Rightarrow x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$

Trigonometriske identiteter $\theta \in \mathbb{R} \quad n \in \mathbb{Z}$

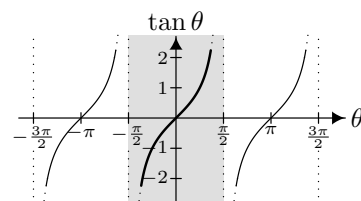
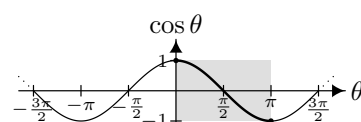
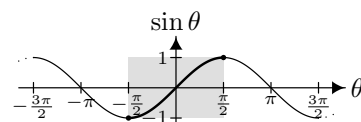
$\tan \theta = \frac{\sin \theta}{\cos \theta}$ $\sin \theta = \sin(\theta + 2\pi n)$
 $\sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1$ $\cos \theta = \cos(\theta + 2\pi n)$
 $\tan \theta = \tan(\theta + \pi n)$

$\sin(-\theta) = -\sin \theta$ $\sin(\theta \pm \frac{\pi}{2}) = \pm \cos \theta$
 $\cos(-\theta) = \cos \theta$ $\cos(\theta \pm \frac{\pi}{2}) = \mp \sin \theta$
 $\tan(-\theta) = -\tan \theta$ $\tan(\theta \pm \frac{\pi}{2}) = \pm \tan \theta$

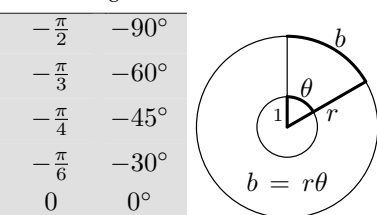
$\sin(\pi - \theta) = \sin \theta$ $\sin(n\pi) = 0$
 $\cos(\pi - \theta) = -\cos \theta$ $\cos(n\pi) = (-1)^n$
 $\tan(\pi - \theta) = -\tan \theta$ $\tan(n\pi) = 0$

$\sin(a \pm b) = \sin a \cos b \pm \cos a \sin b$
 $\cos(a \pm b) = \cos a \cos b \mp \sin a \sin b$
 $\sin a \pm \sin b = 2 \sin \frac{a \pm b}{2} \cdot \cos \frac{a \mp b}{2}$
 $\cos a + \cos b = 2 \cos \frac{a+b}{2} \cdot \cos \frac{a-b}{2}$
 $\cos a - \cos b = -2 \sin \frac{a+b}{2} \cdot \sin \frac{a-b}{2}$

θ	grader	$\sin \theta$	$\cos \theta$	$\tan \theta$
0	0°	0	1	0
$\frac{\pi}{6}$	30°	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$
$\frac{\pi}{4}$	45°	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1
$\frac{\pi}{3}$	60°	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\sqrt{3}$
$\frac{\pi}{2}$	90°	1	0	$\pm \infty$
$\frac{2\pi}{3}$	120°	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$-\sqrt{3}$
$\frac{3\pi}{4}$	135°	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	-1
$\frac{5\pi}{6}$	150°	$\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$
π	180°	0	-1	0
$\frac{7\pi}{6}$	210°	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$
$\frac{5\pi}{4}$	225°	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	1
$\frac{4\pi}{3}$	240°	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$\sqrt{3}$
$\frac{3\pi}{2}$	270°	-1	0	$\pm \infty$
$\frac{5\pi}{3}$	300°	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$-\sqrt{3}$
$\frac{7\pi}{4}$	315°	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	-1
$\frac{11\pi}{6}$	330°	$-\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$
2π	360°	0	1	0



$\theta - 2\pi$ grader



Potenser og røtter $a, b, n, m \in \mathbb{R}^+ \quad k \in \mathbb{N}$

$a^k = \overbrace{a \cdot a \cdot \dots \cdot a}^{k \text{ ganger}}$ $\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$ $a^{1/n} = x$ slik at $x^n = a$
 $a^n = e^{n \cdot \ln a}$ $0^n = 0$ $\sqrt[n]{a} = a^{1/n}$
 $a^0 = 1$ $0^{-n} = \frac{1}{0^n} = \frac{1}{0} = \emptyset$ $\sqrt{a} = \sqrt[2]{a} = a^{1/2}$
 $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$ $(-1)^k = 1$ (k partall) $\sqrt[n]{a \cdot b} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}$
 $a^{m+n} = a^m \cdot a^n$ $(-1)^k = -1$ (k oddetall) $\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$
 $a^{m-n} = \frac{a^m}{a^n}$ $(-a)^k = (-1)^k \cdot a^k$ $\sqrt[n]{-a} = -\sqrt[n]{a}$ (n oddetall)
 $a^{m \cdot n} = (a^m)^n$ $(-a)^{-k} = \frac{(-1)^k}{a^k}$ $\sqrt[n]{-a} \notin \mathbb{R}$ (n ikke oddetall)
 $(a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n$ $(-a)^0 = 1$ $\sqrt{a^2 \cdot b} = a \cdot \sqrt{b}$
 $0^0 = 1$ eller \emptyset

Derivasjon mhp x

Der a, b og c er konstante, u og v er funksjoner av x .

$(c)' = 0$ $(\sin x)' = \cos x$
 $(cu)' = cu'$ $(\cos x)' = -\sin x$
 $(u + v)' = u' + v'$ $(\tan x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$
 $(uv)' = u'v + uv'$ $\sin(ax + b)' = a \cos(ax + b)$
 $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$ $\cos(ax + b)' = -a \sin(ax + b)$
 $u(v)' = u'(v) \cdot v'$ $\tan(ax + b)' = \frac{a}{\cos^2(ax + b)}$
 $(x^n)' = nx^{n-1}$ $(\sin^{-1} x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
 $(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$ $(\cos^{-1} x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
 $\left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2}$ $(\tan^{-1} x)' = \frac{1}{1+x^2}$
 $(a^x)' = a^x \ln a$ $(\ln x)' = \frac{1}{x}$
 $(e^x)' = e^x$ $(\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a}$
 $(e^{cx})' = ce^{cx}$ $|x|' = \frac{|x|}{x}$

Logaritmefunksjonen $\log_a x$

Funksjonen $\log_a x$ er definert som inversfunksjonen til a^x .

$D_{\log_a x} = \mathbb{R}^+, V_{\log_a x} = \mathbb{R}$ og har følgende egenskaper:

$\log_a(x \cdot y) = \log_a x + \log_a y$
 $\log_a\left(\frac{x}{y}\right) = \log_a x - \log_a y$
 $\log_a(x^r) = r \cdot \log_a x$
 $\log_a x = \frac{\log_b x}{\log_b a}$
 $\log_a 1 = 0$
 $\log_a a = 1$
 $\log_a a^x = x$

$\log_a x$ med $a = 2, a = e$ og $a = 10$ er definert slik:
 $\lg x = \log_2 x$
 $\ln x = \log_e x$
 $\log x = \log_{10} x$

Integrasjon

$\int x^n dx = \frac{1}{n+1} x^{n+1} + c$ $\int \frac{dx}{a^2+x^2} = \frac{1}{a} \tan^{-1}\left(\frac{x}{a}\right) + c$
 $\int \frac{1}{x} dx = \ln|x| + c$ $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \sin^{-1}\left(\frac{x}{a}\right) + c$
 $\int \frac{1}{ax+b} dx = \frac{1}{a} \ln|ax + b| + c$ $\int \frac{1}{\cos^2 x} dx = \tan x + c$
 $\int \sin ax dx = -\frac{1}{a} \cos ax + c$ $\int \frac{1}{\sin^2 x} dx = -\frac{1}{\tan x} + c$
 $\int \cos ax dx = \frac{1}{a} \sin ax + c$ $\int e^{ax} dx = \frac{1}{a} e^{ax} + c$
 $\int a^x dx = \frac{1}{\ln a} a^x + c$ $\int uv' = uv - \int u'v$
 $\int_a^b f(x)g'(x) dx = f(x)g(x)\Big|_a^b - \int_a^b f'(x)g(x) dx$
 $\int_a^b f(g(x)) \cdot g'(x) dx = \int_{g(a)}^{g(b)} f(u) du$

Et par rekker

$\sum_{n=0}^{\infty} a \cdot k^n = \frac{a}{1-k}$ der $-1 < k < 1$
 $\sum_{n=1}^{\infty} n \cdot k^{n-1} = \frac{1}{(1-k)^2}$ der $-1 < k < 1$

Brøkgregning

$$2 = 2 \cdot \frac{1}{1} = \frac{2 \cdot 1}{1} = \frac{2 \cdot 1}{1} = \frac{1 \cdot 2}{1} = \frac{1 \cdot 2}{1} = \frac{1}{1} \cdot 2 = 2$$

Omregning av lengder

μm	mm	cm	dm	m	km	mil
1	0.001	0.0001	0.00001	0.000001	0.000000001	0.000000001
1000	1	0.1	0.01	0.001	0.000001	0.0000001
10000	10	1	0.1	0.01	0.00001	0.000001
100000	100	10	1	0.1	0.0001	0.00001
1000000	1000	100	10	1	0.001	0.0001
1000000000	1000000	100000	10000	1000	1	0.1
10000000000	10000000	1000000	100000	10000	10	1

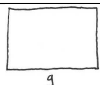
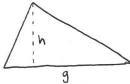
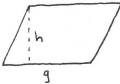


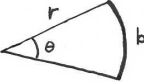
Omregning av kvadrat

μm^2	mm^2	cm^2	dm^2	m^2	km^2	mil^2
1	0.000001	0.00000001	$1 \cdot 10^{-10}$	$1 \cdot 10^{-12}$	$1 \cdot 10^{-18}$	$1 \cdot 10^{-20}$
1000000	1	0.01	0.0001	0.000001	$1 \cdot 10^{-12}$	$1 \cdot 10^{-14}$
1000000000	100	1	0.01	0.0001	$1 \cdot 10^{-10}$	$1 \cdot 10^{-12}$
100000000000	10000	100	1	0.01	0.00000001	$1 \cdot 10^{-10}$
$1 \cdot 10^{12}$	1000000	10000	100	1	0.000001	0.00000001
$1 \cdot 10^{18}$	$1 \cdot 10^{12}$	10000000000	100000000	1000000	1	0.01
$1 \cdot 10^{20}$	$1 \cdot 10^{14}$	$1 \cdot 10^{12}$	10000000000	100000000	100	1


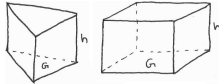
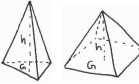



Omregning av kubikk

μm^3	mm^3	cm^3	dm^3	m^3	km^3	mil^3
1	0.000000001	$1 \cdot 10^{-12}$	$1 \cdot 10^{-15}$	$1 \cdot 10^{-18}$	$1 \cdot 10^{-27}$	$1 \cdot 10^{-30}$
1000000000	1	0.001	0.000001	0.000000001	$1 \cdot 10^{-18}$	$1 \cdot 10^{-21}$
$1 \cdot 10^{12}$	1000	1	0.001	0.000001	$1 \cdot 10^{-15}$	$1 \cdot 10^{-18}$
$1 \cdot 10^{15}$	1000000	1000	1	0.001	$1 \cdot 10^{-12}$	$1 \cdot 10^{-15}$
$1 \cdot 10^{18}$	1000000000	1000000	1000	1	0.000000001	$1 \cdot 10^{-12}$
$1 \cdot 10^{27}$	$1 \cdot 10^{18}$	$1 \cdot 10^{15}$	$1 \cdot 10^{12}$	1000000000	1	0.001
$1 \cdot 10^{30}$	$1 \cdot 10^{21}$	$1 \cdot 10^{18}$	$1 \cdot 10^{15}$	$1 \cdot 10^{12}$	1000	1

Geometriske figurer i planet

Figur	Areal		Omkrets
Rektangel	gh		$2(g + h)$
Trekant	$\frac{gh}{2}$		
Parallelogram	gh		
Trapes	$\frac{(a+b)h}{2}$		
Sirkel	πr^2		$2\pi r$
Sektor	$\frac{br}{2} = \pi r^2 \theta$		$b = r\theta$

Geometriske figurer i rommet

Figur	Volum		Overflate
Kube	s^3		$6s^2$
Prisme	Gh		
Pyramide	$\frac{Gh}{3}$		
Sylinder	$\pi r^2 h$		$2\pi r(r + h)$
Kjegle	$\frac{\pi r^2 h}{3}$		$\pi r(r + s)$
Kule	$\frac{4\pi r^3}{3}$		$4\pi r^2$

Prosent, promille

$$1 \text{ prosent} = 1 \text{ hundreddel} = 1\% = \frac{1}{100} = 0.01$$

$$1 \text{ promille} = 1 \text{ tusendel} = 1\text{‰} = \frac{1}{1000} = 0.001$$

Mengder

En **mengde** er en samling av **elementer**. Følgende notasjon kan brukes, der S og T er mengder:

$a \in S$	a er element i S
$a \notin S$	a er ikke element i S
$S \cup T$	Unionen av S og T (inneholder alle elementer i S og T til sammen)
$S \cap T$	Snittet av S og T (inneholder alle elementer felles for S og T)
\emptyset	Den tomme mengden (inneholder ingen elementer)
$S \subseteq T$	S er en delmengde av T (T inneholder minst alle elementene til S)

Grader og radianer

En vinkel n° i grader kan regnes om til en vinkel θ i radianer med formelen

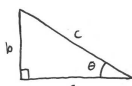
$$\theta = \frac{\pi}{180^\circ} n^\circ$$

Motsatt har vi

$$n^\circ = \frac{180^\circ}{\pi} \theta$$

De trigonometriske funksjonene relateres til sidelengdene i en rettvinklet trekant på følgende måte:

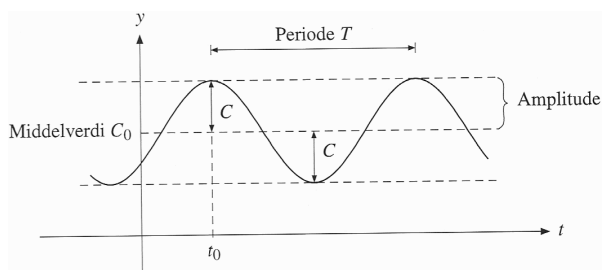
$$\begin{aligned} \sin \theta &= \frac{b}{c} \\ \cos \theta &= \frac{a}{c} \\ \frac{\sin \theta}{\cos \theta} &= \tan \theta = \frac{b}{a} \end{aligned}$$



Tilnærmet beskrivelse av et periodisk fenomen ved hjelp av en cosinuskurve

Et periodisk fenomen kan ofte tilpasses med funksjonen

$$y = C_0 + C \cos\left(\frac{2\pi}{T}(t - t_0)\right)$$



Sirkelfrekvens/vinkelfrekvens/vinkelhastighet

Hvis T er perioden til en harmonisk svingning, så kaller vi størrelsen $2\pi/T$ svingningens sirkelfrekvens ω

$$\omega = \frac{2\pi}{T} \quad \Leftrightarrow \quad T = \frac{2\pi}{\omega}$$

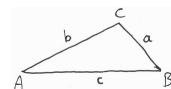
La ω være et positivt tall. Funksjonene $\cos \omega t$ og $\sin \omega t$ gir harmoniske svingninger med sirkelfrekvens ω og periode $T = 2\pi/\omega$.

For vilkårlige trekanter i planet gjelder

$$\text{Areal} = \frac{1}{2}bc \sin A$$

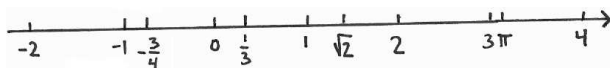
$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$$

$$\frac{\sin A}{a} = \frac{\sin B}{b} = \frac{\sin C}{c}$$



Tall

Tall kan beskrives geometrisk som punkter på en tallinje:



Tall kan også defineres som mengdene \mathbb{N} , \mathbb{Z} , \mathbb{Q} , \mathbb{R} slik:

$$\text{Naturlige tall } \mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$$

$$\text{Hele tall } \mathbb{Z} = \{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots\}$$

$$\text{Rasjonale tall } \mathbb{Q} = \frac{a}{b} \quad \text{der } a, b \in \mathbb{Z} \text{ og } b \neq 0$$

$$\text{Reelle tall } \mathbb{R} = \text{Alle tall på tallinjen}$$

$$\text{Irrasjonale tall} = \text{Reelle tall som ikke er rasjonale}$$

$$\mathbb{N} \subseteq \mathbb{Z} \subseteq \mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R}$$

Ulikheter

Hvis $a, b, c \in \mathbb{R}$ så har vi:

$$a < b \Rightarrow a + c < b + c$$

$$a < b \Rightarrow a - c < b - c$$

$$a < b \text{ og } c > 0 \Rightarrow ac < bc$$

$$a < b \text{ og } c < 0 \Rightarrow ac > bc$$

$$a < b \Rightarrow -a > -b$$

$$a > 0 \Rightarrow \frac{1}{a} > 0$$

$$a, b > 0 \text{ eller } a, b < 0 \Rightarrow a < b \Rightarrow \frac{1}{a} > \frac{1}{b}$$

Andregradslikningen

Hvis $x = x_0$ og $x = x_1$ er løsninger av $ax^2 + bx + c = 0$, så har vi følgende:

$$ax^2 + bx + c = a(x - x_0)(x - x_1)$$

$$x_0 + x_1 = -\frac{b}{a}$$

$$x_0 \cdot x_1 = \frac{c}{a}$$

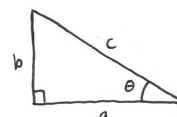
Symmetrilinjen til funksjonen $f(x) = ax^2 + bx + c$ ligger på

$$x = -\frac{b}{2a}$$

Pytagoras' setning

I en rettvinklet trekant med katetlengder a og b og hypotenuslengde c så har vi

$$a^2 + b^2 = c^2$$



Intervaller

En delmengde av tallinja kalles et **intervall** om den inneholder minst to tall og inneholder alle reelle tall mellom to vilkårlige elementer i delmengden. Et linjesegment av tallinja er et **endelig intervall**. Et ubegrenset område av tallinja er et **uendelig intervall**. Et intervall er **lukket** om det inneholder begge **endepunktene**, **åpent** om det ikke inneholder noen endepunkter og **halvåpent** om det inneholder ett av endepunktene men ikke det andre. Punkter i intervallet som ikke er endepunkter kalles **indre punkter**. Vi har følgende typer intervaller:

Notasjon	Mengde	Type
$\langle a, b \rangle$	$\{x a < x < b\}$	Åpent, endelig
$[a, b]$	$\{x a \leq x \leq b\}$	Lukket, endelig
$[a, b)$	$\{x a \leq x < b\}$	Halvåpent, endelig
$\langle a, b]$	$\{x a < x \leq b\}$	Halvåpent, endelig
$\langle a, \infty \rangle$	$\{x x > a\}$	Åpent, uendelig
$[a, \infty)$	$\{x x \geq a\}$	Lukket, uendelig
$\langle -\infty, b \rangle$	$\{x x < b\}$	Åpent, uendelig
$[-\infty, b]$	$\{x x \leq b\}$	Lukket, uendelig
$\langle -\infty, \infty \rangle$	\mathbb{R}	Åpent, lukket, uendelig

Gjeldende siffer

Antall gjeldende siffer er det totale antallet siffer unntatt eventuelle nuller til venstre.

Standard form

$$a \cdot 10^n$$

Gjeldende siffer i $a \cdot 10^n$ er lik gjeldende siffer i a .

Sifferregel 1

Når et tall y kommer frem ved multiplikasjon og/eller divisjon fra tall y_1, y_2, \dots, y_r , så kan y angis med like mange gjeldende siffer som det av tallene y_1, y_2, \dots, y_r som har færrest gjeldende siffer.

Sifferregel 2

Når et tall y kommer frem ved addisjon og/eller subtraksjon fra tall y_1, y_2, \dots, y_r , så kan y angis med like mange desimaler som det av tallene y_1, y_2, \dots, y_r som har færrest desimaler.

Repeterende desimaler

$$2.333333333 \dots = 2.\bar{3}$$

$$5.124242424 \dots = 5.1\overline{24}$$

Absolutt økning

Absolutt økning = ny verdi – gammel verdi = $x_1 - x_0$

Relativ økning

$$\text{Relativ økning} = \frac{\text{absolutt økning}}{\text{gammel verdi}} = \frac{x_1 - x_0}{x_0}$$

Vekstfaktor

$$\text{Vekstfaktor} = \frac{\text{ny verdi}}{\text{gammel verdi}} = \frac{x_1}{x_0}$$

Hvis den relative økningen er $p\%$ så har vi

$$\text{Vekstfaktor} = 1 + \frac{p}{100}$$

$$p = (\text{Vekstfaktor} - 1) \cdot 100$$

Å øke med $p\%$ er det samme som å gange med $1 + \frac{p}{100}$.

Geometrisk følge

Den geometriske følgen er gitt ved

$$a, ak, ak^2, ak^3, ak^4, \dots$$

I en geometrisk følge med kvotienten k er ledd nr. i gitt ved $a_i = k^{i-1} \cdot a_1$ der a_1 er det første leddet. Summen av et visst antall av leddene i denne følgen kan skrives på forskjellige måter:

$$a + ak + ak^2 + \dots + ak^{n-1} = a \frac{1 - k^n}{1 - k} = a \frac{k^n - 1}{k - 1}$$

$$a + ak + ak^2 + \dots + ak^n = a \frac{1 - k^{n+1}}{1 - k} = a \frac{k^{n+1} - 1}{k - 1}$$

Summetegnet \sum hjelper oss til å skrive en sum med mange ledd på en kompakt måte:

$$\sum_{k=1}^n a_k = a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_{n-1} + a_n$$

Den greske bokstaven Σ står for "sum". **Summasjonsindeksen** k sier hvor summen starter (tallet under Σ -symbolet) og hvor den slutter (ved tallet over Σ -symbolet).

Regneregler for summetegnet

$$\sum_{k=1}^n (a_k + b_k) = \sum_{k=1}^n a_k + \sum_{k=1}^n b_k \quad \text{sum}$$

$$\sum_{k=1}^n (a_k - b_k) = \sum_{k=1}^n a_k - \sum_{k=1}^n b_k \quad \text{differanse}$$

$$\sum_{k=1}^n c \cdot a_k = c \cdot \sum_{k=1}^n a_k \quad \text{konstant multipl}.$$

$$\sum_{k=1}^n c = n \cdot c \quad \text{konstant verdi}$$

Noen vanlige endelige summer

$$\sum_{k=1}^n k = \frac{n(n+1)}{2} \quad \text{De } n \text{ første heltallene}$$

$$\sum_{k=1}^n k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \quad \text{De } n \text{ første kvadratene}$$

$$\sum_{k=1}^n k^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2} \right)^2 \quad \text{De } n \text{ første kubene}$$

Gjennomsnittet av tallene x_1, x_2, \dots, x_n er gitt ved

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i$$

Logikk

For utsagn P og Q betyr følgende utsagn det samme:

- $P \Rightarrow Q$ (leses "P impliserer Q")
- P bare hvis Q
- Q hvis P
- Hvis P så Q
- P er en tilstrekkelig betingelse for Q
- Q er en nødvendig betingelse for P

For utsagn P og Q betyr følgende utsagn det samme:

- $P \Leftrightarrow Q$ (leses "P er ekvivalent med Q")
- $Q \Rightarrow P$ og $P \Rightarrow Q$
- P hvis og bare hvis Q
- Q hvis og bare hvis P
- P er en nødvendig og tilstrekkelig betingelse for Q
- Q er en nødvendig og tilstrekkelig betingelse for P

Absoluttverdi

Hvis $a, b, x \in \mathbb{R}$ så har vi:

$$|x| = \begin{cases} x & \text{hvis } x \geq 0 \\ -x & \text{hvis } x < 0 \end{cases}$$

$$|-a| = |a|$$

$$|-a| \neq -|a|$$

$$|ab| = |a||b|$$

$$\left| \frac{a}{b} \right| = \frac{|a|}{|b|}$$

$$|a + b| \leq |a| + |b| \quad (\text{trekantulikheten})$$

Hvis $a > 0$ har vi:

$$|x| = a \quad \text{hvis og bare hvis} \quad x = \pm a$$

$$|x| < a \quad \text{hvis og bare hvis} \quad -a < x < a$$

$$|x| > a \quad \text{hvis og bare hvis} \quad x > a \text{ eller } x < -a$$

$$|x| \leq a \quad \text{hvis og bare hvis} \quad -a \leq x \leq a$$

$$|x| \geq a \quad \text{hvis og bare hvis} \quad x \geq a \text{ eller } x \leq -a$$

Kvadratrotten til x^2

Er relatert til absoluttverdien av x på følgende måte:

$$\sqrt{x^2} = |x|$$

Funksjoner

En funksjon fra en mengde D til en mengde V er en regel som tilordner ett (unikt) element $f(x) \in V$ til hvert element $x \in D$. Mengden D med alle mulige inputverdier kalles **definisjonsmengden** til funksjonen. Mengden av alle verdiene til $f(x)$ når x varierer gjennom hele D kalles **verdimengden** til funksjonen. En funksjon kalles **empirisk** om den er laget på grunnlag av et observasjonsmateriale.

Voksende, avtagende og monotone funksjoner

La f være en funksjon definert på et intervall I og la x_1 og x_2 være to vilkårlige punkter i I . Da har vi:

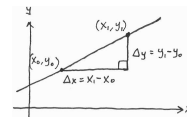
1. Hvis $f(x_1) < f(x_2)$ når $x_1 < x_2$, så er f **voksende** på I .
2. Hvis $f(x_1) > f(x_2)$ når $x_1 < x_2$, så er f **avtagende** på I .

En funksjon som enten er voksende eller avtagende på I kalles **monoton** på I .

Linjer i planet

Stigningstallet a til en ikkevertikal linje gjennom punktene (x_0, y_0) og (x_1, y_1) er definert som

$$a = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}$$



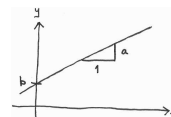
En linje med stigningstall a som går gjennom punktet (x_1, y_1) kan beskrives med likningen

$$y = y_1 + a(x - x_1)$$

En horisontal linje gjennom punktet (x_1, y_1) kan derfor beskrives med likningen $y = y_1$. En vertikal linje gjennom punktet (x_1, y_1) kan beskrives med likningen $x = x_1$.

En linje med stigningstall a og konstantledd b kan beskrives med likningen

$$y = ax + b$$



Alle linjer kan skrives på normalformen

$$Ax + By = C$$

der A og B ikke begge er lik null.

Polynom

En funksjon $p(x)$ er et **polynom** hvis

$$p(x) = a_0 + a_1x + \dots + a_{n-1}x^{n-1} + a_nx^n$$

hvor $n \in \mathbb{N}$ og $a_0, a_1, a_2, \dots, a_n \in \mathbb{R}$ (og kalles koeffisientene) til polynomet. Alle polynomer har definisjonsmengde $(-\infty, \infty)$. n kalles **graden** av polynomet.

Rasjonale funksjoner

En rasjonal funksjon er et forhold mellom to polynomer:

$$f(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$$

der p og q er polynomer. Definisjonsmengden til en rasjonal funksjon er mengden av alle $x \in \mathbb{R}$ der $q(x) \neq 0$.

Proporsjonalitet

To variable x og y er proporsjonale til hverandre hvis den ene alltid er en konstant multiplum av den andre, dvs:

$$y = kx \quad \Rightarrow \quad y \propto x$$

for en eller annen konstant $k \neq 0$.

Sammensatte funksjoner

Hvis f og g er funksjoner, så er den sammensatte funksjonen

$$(f \circ g)(x) = f(g(x))$$

Definisjonsmengden til $f \circ g$ består av tallene x i definisjonsmengden til g der $g(x)$ ligger i definisjonsmengden til f .

Flytting/modifisering av grafer

En graf kan flyttes vertikalt ved å legge til en konstant k :

Hvis $k > 0$ så har vi:

- $f(x) + k$ Flytter grafen til f opp lengden k
- $f(x) - k$ Flytter grafen til f ned lengden k
- $f(x + k)$ Flytter grafen til f lengden k mot venstre
- $f(x - k)$ Flytter grafen til f lengden k mot høyre

Hvis $k > 1$ så har vi:

- $kf(x)$ Strekker grafen til f vertikalt med faktoren k
- $\frac{1}{k}f(x)$ Krymper grafen til f vertikalt med faktoren k
- $f(kx)$ Krymper grafen til f horisontalt med faktoren k
- $f(x/k)$ Strekker grafen til f horisontalt med faktoren k

Hvis $k = -1$ så har vi:

- $kf(x) = -f(x)$ Speiler grafen til f gjennom x -aksen
- $f(kx) = f(-x)$ Speiler grafen til f gjennom y -aksen

Enentydig funksjon

En funksjon $f(x)$ er **enentydig** (eller **injektiv**) på en definisjonsmengde D hvis $f(x_1) \neq f(x_2)$ når $x_1 \neq x_2$ i D .

Horisontallinjetesten for enentydige funksjoner

En funksjon $y = f(x)$ er enentydig hvis og bare hvis grafen skjærer enhver horisontal linje høyst ett sted.

Invers funksjon

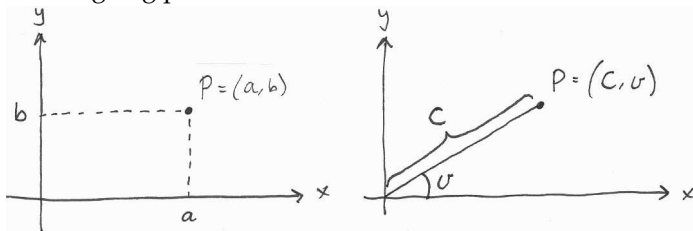
Anta at f er en enentydig funksjon på en definisjonsmengde D med verdimengde V . Den **inverse funksjonen** f^{-1} er definert ved

$$f^{-1}(a) = b \quad \text{hvis} \quad f(b) = a$$

Definisjonsmengden til f^{-1} er V og verdimengden til f^{-1} er D .

Polarkoordinatene til et punkt i planet

Et punkt P i xy -planet kan beskrives på kartesisk måte som (a, b) eller på polar form (C, v) der C er avstanden fra origo til punktet og v er vinkelene mellom x -aksen og linja mellom origo og punktet:



Vi har her følgende sammenhenger:

$$a = C \cos v \quad b = C \sin v$$

$$\cos v = \frac{a}{C} \quad \sin v = \frac{b}{C}$$

$$C = \frac{a}{\cos v} = \frac{b}{\sin v} = \sqrt{a^2 + b^2}$$

$$\tan v = \frac{b}{a}$$

Omforming av uttrykket $a \cos \omega t + b \sin \omega t$

La a, b og ω være gitte tall $\neq 0$ med $\omega > 0$. Funksjonen

$$f(t) = a \cos \omega t + b \sin \omega t$$

kan skrives på formen

$$f(t) = C \cos \omega(t - t_0)$$

der $(C, \omega t_0)$ er polarkoordinatene til punktet (a, b) . Spesielt har vi

$$C = \sqrt{a^2 + b^2} \quad \text{og} \quad \tan \omega t_0 = \frac{b}{a}$$

Vinkelen ωt_0 ligger i intervallet $[0, 2\pi)$ og hører til samme kvadrant som punktet (a, b) .

Interferens

Gitt $C_1, C_2 \geq 0$ og

$$f(t) = C_1 \cos(\omega t - \phi_1) \quad \text{og} \quad g(t) = C_2 \cos(\omega t - \phi_2)$$

Amplituden C til funksjonen $f(t) + g(t)$ er da gitt ved

$$C = \sqrt{C_1^2 + C_2^2 + 2C_1C_2 \cos(\phi_1 - \phi_2)}$$

og middelverdien er 0.

Grenseverdier

Hvis $L, M, c, k \in \mathbb{R}$ og

$$\lim_{x \rightarrow c} f(x) = L \quad \text{og} \quad \lim_{x \rightarrow c} g(x) = M, \quad \text{så}$$

$$\lim_{x \rightarrow c} (f(x) + g(x)) = L + M$$

$$\lim_{x \rightarrow c} (f(x) - g(x)) = L - M$$

$$\lim_{x \rightarrow c} (f(x) \cdot g(x)) = L \cdot M$$

$$\lim_{x \rightarrow c} (k \cdot f(x)) = k \cdot L$$

$$\lim_{x \rightarrow c} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{L}{M}, \quad M \neq 0$$

Merk at disse reglene også er gyldige når $c = \pm\infty$.

Grenseverdien til polynomer

Hvis $p(x)$ er et polynom, så er

$$\lim_{x \rightarrow c} p(x) = p(c)$$

Grenseverdien til rasjonale funksjoner

Hvis $p(x)$ og $q(x)$ er polynomer og $q(c) \neq 0$, så er

$$\lim_{x \rightarrow c} \frac{p(x)}{q(x)} = \frac{p(c)}{q(c)}$$

Venstre og høyre grenseverdier

En funksjon $f(x)$ har en grenseverdi når x går mot c hvis og bare hvis den har venstre og høyre grenseverdier der og disse grenseverdiene er like:

$$\lim_{x \rightarrow c} f(x) = L \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow c^-} f(x) = L \quad \text{og} \quad \lim_{x \rightarrow c^+} f(x) = L$$

Vertikal asymptote

En linje $x = a$ er en **vertikal asymptote** av grafen til en funksjon $y = f(x)$ hvis enten

$$\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = \pm\infty \quad \text{eller} \quad \lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = \pm\infty$$

Kontinuitet

En funksjon $f(x)$ er **kontinuerlig** ved $x = c$ hvis og bare hvis følgende tre krav er oppfylt:

1. $f(c)$ finnes (c er i definisjonsmengden til f)
2. $\lim_{x \rightarrow c} f(x)$ finnes (f har en grense når $x \rightarrow c$)
3. $\lim_{x \rightarrow c} f(x) = f(c)$ (grenseverdien er lik $f(c)$)

Kontinuerlig funksjon

En funksjon er kontinuerlig på et intervall hvis og bare hvis den er kontinuerlig på alle punktene i intervallet. En **kontinuerlig funksjon** er en funksjon som er kontinuerlig på alle punktene i funksjonens definisjonsmengde. En funksjon trenger ikke være kontinuerlig på alle intervaller. F.eks. $y = 1/x$ er ikke kontinuerlig i intervallet $[-1, 1]$, men er kontinuerlig i definisjonsmengden $\langle -\infty, 0 \rangle \cup \langle 0, \infty \rangle$.

Noen grenseverdier

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} &= 1 \\ \lim_{n \rightarrow \infty} k^n &= 0 \quad \text{når} \quad -1 < k < 1 \\ \lim_{n \rightarrow \infty} k^n &= 1 \quad \text{når} \quad k = 1 \\ \lim_{n \rightarrow \infty} k^n &\notin \mathbb{R} \quad \text{når} \quad k \leq -1 \\ \lim_{n \rightarrow \infty} k^n &= \infty \quad \text{når} \quad k > 1 \end{aligned}$$

Skjæringssetningen

En funksjon $y = f(x)$ som er kontinuerlig på et lukket intervall $[a, b]$ antar alle verdier mellom $f(a)$ og $f(b)$. Dvs at hvis y_0 er en hvilken som helst verdi mellom $f(a)$ og $f(b)$, så er $y_0 = f(c)$ for en eller annen $c \in [a, b]$.

Egenskaper til kontinuerlige funksjoner

Hvis funksjonene f og g er kontinuerlige ved $x = c$, da er følgende kombinasjoner også kontinuerlige ved $x = c$:

Summer	$f + g$
Differanser	$f - g$
Produkter	$f \cdot g$
Konstante multipler	$k \cdot f$, for alle tall k
Kvotienter	f/g , gitt at $g(c) \neq 0$
Sammensatte funksjoner	$f(g(x))$

Horisontal asymptote

En linje $y = b$ er en **horisontal asymptote** av grafen til en funksjon $y = f(x)$ hvis enten

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = b \quad \text{eller} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = b$$

En setning om eksistens av grenseverdi

Hvis det fins et tall x_0 og C slik at $f(x) \geq C$ for alle x i definisjonsmengden til f som er større enn x_0 og f er avtakende i denne delen av definisjonsmengden, da eksisterer $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$.

En tilsvarende setning får vi om vi bytter om ordet "avtakende" med "voksende" samtidig som " $f(x) \geq C$ " byttes ut med " $f(x) \leq C$ ".

Tallfølger

En **tallfølge** er en funksjon med definisjonsmengde \mathbb{N} . Hvis a er en funksjon av n og a er en tallfølge, kan vi velge å skrive $a(n)$ eller a_n .

Konvergens av tallfølger

Hvis a_n er en tallfølge og

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = C \in \mathbb{R}$$

så sier vi at a_n **konvergerer** mot C .

Rekker

Hvis a_n er en tallfølge så kaller vi

$$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n$$

for en **endelig rekke** med n ledd. Merk at S_n her også er en tallfølge der ledd n er summen av de n første tallene i a_n . Vi kaller

$$S = a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n + a_{n+1} + \dots$$

for en **uendelig rekke**, eller bare en **rekke**. En annen skrivemåte for disse er

$$S_n = \sum_{i=1}^n a_i \quad \text{og} \quad S = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

Vi har følgende sammenheng mellom S og S_n :

$$S = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n$$

Ekspontialfunksjon med a som grunntall

Funksjoner på formen

$$f(t) = a^t$$

der $t \in \mathbb{R}$ og $a \in \mathbb{R}^+$ kalles **eksponentialfunksjoner**. a kalles **grunntallet**.

En funksjon på formen $f(t) = c \cdot a^t$ kan tilpasses til å gå gjennom punktene (t_1, y_1) og (t_2, y_2) hvis $t_1 \neq t_2$ og ingen av punktene ligger i origo. Formlene for dette ser slik ut:

$$a = \left(\frac{y_2}{y_1}\right)^{\frac{1}{t_2 - t_1}}$$

$$c = \frac{y_1}{a^{t_1}} = \frac{y_2}{a^{t_2}}$$

Hvis $t_1 < t_2$ så har vi at

$$\frac{f(t_2)}{f(t_1)} = \frac{c \cdot a^{t_2}}{c \cdot a^{t_1}} = a^{t_2 - t_1}$$

Dvs at eksponentialfunksjoner har samme vekstfaktor over alle intervaller av samme lengde.

Vekst eller minking med p % per år

En størrelse y som **vokser/avtar** eksponentielt med p % per år og er lik y_0 ved tiden t_0 kan beskrives med funksjonen

$$y(t) = c \cdot a^t \quad \text{der} \quad a = 1 \pm \frac{p}{100} \quad \text{og} \quad c = \frac{y_0}{a^{t_0}}$$

Ekspontialfunksjon med e som grunntall

Funksjonen $f(x) = a^x$ kan skrives:

$$\begin{aligned} f(x) &= e^{\lambda x} & \text{der} \quad \lambda = \ln a \geq 0, & \text{ hvis } 0 < a < 1 \\ f(x) &= e^{-\lambda x} & \text{der} \quad \lambda = -\ln a \geq 0, & \text{ hvis } a > 1 \end{aligned}$$

Hvis f er voksende, er **doblingstiden** $T_2 = \frac{\ln 2}{\lambda}$.
Hvis f er avtakende, er **halveringstiden** $T_{1/2} = \frac{\ln 2}{\lambda}$.

Funksjonen pH

pH er en funksjon som gir et mål på hvor mange H_3O^+ -molekyler det finnes per liter i en væskeløsning. Denne konsentrasjonen skrives som $[H_3O^+]$ og har benevnning mol/L. Denne funksjonen er definert slik:

$$pH([H_3O^+]) = -\log([H_3O^+])$$

$pH > 7$ betyr en basisk løsning. $pH < 7$ betyr en sur løsning.

Logaritmer i likningsløsning

Hvis $a, b > 0$ så har vi

$$a^x = b \quad \Leftrightarrow \quad x = \frac{\ln b}{\ln a}$$

Aldersbestemmelse etter ^{14}C -metoden

Hvis I_0 er forholdet mellom ^{14}C og ^{12}C i en levende organisme når den dør, så vil følgende funksjon $I(t)$ beskrive forholdet mellom mengden ^{14}C som er igjen i liket i forhold til I_0 etter tiden t :

$$I(t) = I_0 \left(\frac{1}{2}\right)^{t/5730}$$

Potensfunksjonen $f(x) = c \cdot x^r$

Hvis punktene (x_1, y_1) og (x_2, y_2) ligger i første kvadrant og $x_1 \neq x_2$, så vil parameterene r og c til potensfunksjonen som går gjennom begge punktene være gitt ved

$$\begin{aligned} r &= \frac{\ln(y_2/y_1)}{\ln(x_2/x_1)} \\ c &= \frac{y_1}{x_1^r} = \frac{y_2}{x_2^r} \end{aligned}$$

Allometrisk vekst

La $y = y(t)$ er størrelsen av et gitt organ ved tiden t og $x = x(t)$ være størrelsen av organismen som helhet ved tiden t . Ofte så har vi følgende sammenheng mellom x og y :

$$y = cx^r$$

Der c og r er konstanter. c avhenger av hvilke måleenheter en bruker for x og y . Denne sammenhengens kalles "allometriloven".

Logaritmisk skala

Brukes for å sammenlikne størrelser av ulike størrelsesorden, der størrelsesordenen til et tall er gitt ved logaritmen (med grunntall 10) til tallet. Å plassere et (positivt) tall r på en logaritmisk skala svarer til å plassere $\log r$ på den tilsvarende lineære skalaen.

Et **enkeltlogaritmisk koordinatsystem** med to akser har logaritmisk skala på den ene aksene og lineær skala på den andre aksene. Et **dobbeltlogaritmisk koordinatsystem** med to akser har logaritmisk skala på begge aksene.

Enhver eksponentialfunksjon $y = ca^x$ gir en rett linje når den plottes i et enkeltlogaritmisk koordinatsystem med logaritmisk skala på y -aksen og lineær skala på x -aksen.

Enhver potensfunksjon $y = cx^r$ gir en rett linje når den plottes i et dobbeltlogaritmisk koordinatsystem.

Derivasjon

Gjennomsnittlig vekstrate er gitt ved

$$\frac{\text{endring i løpet av en tidsperiode}}{\text{lengden på tidsperioden}}$$

Hvis en kurve er kontinuerlig ved et gitt tidspunkt, så er kurvens **øyeblikkelige vekstrate** ved tidspunktet definert som stigningstallet til tangenten til kurven ved tidspunktet. Hvis kurven ikke er kontinuerlig ved det gitte tidspunktet, har ikke kurven heller noen øyeblikkelige vekstrate der.

Den deriverte

Den deriverte $f'(x)$ til en funksjon $f(x)$ er definert slik:

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

$f'(a)$ er stigningstallet til funksjonen $f(x)$ i punktet $x = a$. Hvis $f(x)$ er deriverbar for $x = a$ så er også $f(x)$ kontinuerlig for $x = a$.

Derivasjon og bevegelse

Posisjon som funksjon av tid beskrives ofte som funksjonen $x(t)$. Hastighet som funksjon av tid beskrives ofte som $v(t)$. Akselerasjon beskrives ofte som $a(t)$. Det viser seg at

$$x'(t) = v(t) \quad \text{og} \quad v'(t) = a(t)$$

Skrivemåter for den deriverte

Det er mange måter å skrive den deriverte på. Her er noen vanlige alternativer:

$$f'(x) = y' = \frac{dy}{dx} = \frac{df}{dx} = \frac{d}{dx} f(x)$$

Kjerneregelen i Leibniz' notasjon

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}$$

Førstederivert testen for monotone funksjoner

Anta at f er kontinuerlig på $[a, b]$ og deriverbar på (a, b) . Hvis $f'(x) > 0$ for alle $x \in (a, b)$, da er f voksende på $[a, b]$. Hvis $f'(x) < 0$ for alle $x \in (a, b)$, da er f avtagende på $[a, b]$.

Positiv krumning, negativ krumning

Grafen til en deriverbar funksjon $y = f(x)$ har på et åpent intervall I

1. **positiv krumning** hvis f' er voksende på I
2. **negativ krumning** hvis f' er avtagende på I .

Andrederivert testen for konkavitet

La $y = f(x)$ være to ganger deriverbar på et intervall I . Hvis $f'' > 0$ på I , da har grafen til f over I positiv krumning. Hvis $f'' < 0$ på I , da har grafen til f over I negativ krumning.

Vendepunkt

Et punkt der grafen til en funksjon kan ha en tangent og der krumningen endres, kalles et **vendepunkt**.

Max og min

Hvis f er kontinuerlig i et begrenset intervall I , så har f minst ett maksimumspunkt og minst ett minimumspunkt. Disse punktene er hhv den største og den minste av funksjonsverdien til følgende punkter:

- Endepunktene
- Alle punkter der $f'(x) = 0$
- Alle punkter der $f'(x) = \emptyset$

Linearisering

Funksjonen f kan tilnærmes med en linje ved $x = a$ med

$$F(x) = f(a) + f'(a) \cdot (x - a)$$

Taylorpolynom

Funksjonen f kan tilnærmes med et polynom ved $x = a$ med

$$F_n(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2}(x-a)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$$

L'Hôpitals regel

Hvis $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = 0$ og $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = 0$ så har vi

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

Integrasjon

Bestemt integral

La f være en kontinuerlig funksjon over $[a, b]$. Hvis $F'(x) = f(x)$ for alle $x \in [a, b]$ så kalles $F(b) - F(a)$ det bestemte integralet av f over $[a, b]$ og skrives slik:

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a)$$

Regneregler for bestemt integral

Hvis $f(x)$ og $g(x)$ er kontinuerlige over I og $a, b, c, k \in I$, så har vi følgende regneregler:

Regneregler for bestemte integraler

$$\begin{aligned} \int_a^a f(x) dx &= 0 \\ \int_a^b f(x) dx &= - \int_b^a f(x) dx \\ \int_a^b f(x) + \int_b^c f(x) &= \int_a^c f(x) dx \\ \int_a^b k f(x) dx &= k \int_a^b f(x) dx \\ \int_a^b (f(x) \pm g(x)) dx &= \int_a^b f(x) dx \pm \int_a^b g(x) dx \end{aligned}$$

Anvendelser av bestemt integral

$s(t)$ = tilbakelagt veilengde

$s'(t) = v(t)$ = banehastighet

$$S = \int_{t_0}^{t_1} v(t) dt = s(t_1) - s(t_0)$$

= tilbakelagt veilengde i løpet av $[t_0, t_1]$

$V(t)$ = vannvolum i et kar ved tiden t

$V'(t) = v(t)$ = tilstrømningshastighet

$$\int_{t_0}^{t_1} v(t) dt = V(t_1) - V(t_0)$$

= økning i vannvolum i løpet av $[t_0, t_1]$

$F(t)$ = Effekten i kW ved tiden t

$$\int_{t_0}^{t_1} F(t) dt = \text{Energien i kWh i løpet av } [t_0, t_1]$$

Bestemt integral som areal

$\int_a^b f(x) dx$ kan tolkes som arealet mellom grafen til f , x -aksen, $x = a$ og $x = b$ der alt av areal over x -aksen er positivt og alt av areal under x -aksen er negativt.

Det ubestemte integralet

La f være en kontinuerlig funksjon i et intervall over $[a, b]$. Hvis $F'(x) = f(x)$ for alle $x \in [a, b]$ så kalles $F(x) + C$ det bestemte integralet av f (som er gyldig for alle $x \in [a, b]$) og skrives slik:

$$\int f(x) dx = F(x) + C \quad \text{der } C \text{ er en vilkårlig konstant}$$

Derivasjon av bestemt intergal

$$\frac{d}{dt} \int_a^t f(x) dx = f(t)$$

Differensiallikninger

Hvis $y(t)$ er kontinuerlig på et intervall I , så har vi følgende løsninger av forskjellige differensiallikninger på intervallet:

$$y' = ay \Rightarrow y = Ce^{at}$$

$$y' = ay + b \Rightarrow y = Ce^{at} - \frac{b}{a}$$

$$y' = ay^2 + by + c$$

$$= a(y - A)(y - B) \Rightarrow y = A + \frac{B - A}{1 + ke^{(B-A)at}}$$

$$\text{og } y \equiv A$$

Malthus' modell. La spesifikk vekstrate være definert som $\frac{1}{N} \frac{dN}{dt}$, som kan tolkes som antall avkom et individ i en befolkning produserer per tidsenhet. Antar vi at denne størrelsen er konstant får vi

$$\frac{1}{N} \frac{dN}{dt} = a \Rightarrow \frac{dN}{dt} = aN \Rightarrow N = Ce^{at}$$

Radioaktiv nedbrytning. Om vi antar at endringen i antall radioaktive atomkjerner er proporsjonal med antallet kjerner får vi

$$\frac{dN}{dt} = -\lambda N \Rightarrow N = Ce^{-\lambda t} \quad \text{med halveringstid } t_{1/2} = \frac{\ln 2}{\lambda}$$

Newtons avkjølingslov. Anta at et legeme avkjøles i omgivelser med konstant temperatur T_* . La $T_1 = T(t_1)$ være legemets temperatur ved tiden t_1 og $T_2 = T(t_2)$ være legemets temperatur ved tiden t_2 og $t_1 < t_2$. Vi definerer avkjølingsraten til å være $-\frac{dT}{dt}$. Hvis vi antar at avkjølingsraten er proporsjonal med temperaturdifferansen $T - T_*$ får vi

$$-\frac{dT}{dt} = k(T - T_*) \Rightarrow \frac{dT}{dt} = -k(T - T_*)$$

$$\Rightarrow T = T_* + Ce^{-kt}$$

der

$$k = \frac{\ln((T_1 - T_*)/(T_2 - T_*))}{t_2 - t_1}$$

og

$$C = (T_1 - T_*)e^{kt_1} = (T_2 - T_*)e^{kt_2}$$

Verhulst's modell. La bæreevnen B til befolkningen være så mange individer omgivelsene kan livnære. Om vi antar at spesifikk vekstrate er proporsjonal med forskjellen i bæreevne og antall individer, får vi

$$\frac{1}{N} \frac{dN}{dt} = a(B - N) \Rightarrow \frac{dN}{dt} = -aN(N - B)$$

$$\Rightarrow N = \frac{B}{1 + ke^{-aBt}}$$

Separable differensiallikninger

$$\frac{dy}{dt} = f(t) \cdot g(y) \Rightarrow \int \frac{1}{g(y)} dy = \int f(t) dt$$

Allometrisk vekst. Om vi lar kroppens vekstrate være $\frac{dx}{dt}$ og en kroppsdels vekstrate være $\frac{dy}{dt}$ og antar at kroppdelens spesifikke vekstrate er proporsjonal med kroppens spesifikke vekstrate får vi

$$\frac{1}{y} \frac{dy}{dt} = r \frac{1}{x} \frac{dx}{dt} \Rightarrow y = Cx^r$$

Lineær algebra

En **lineær likning** med variabler x_1, \dots, x_n kan skrives

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \dots + a_nx_n = b$$

der b og **koeffisientene** a_1, \dots, a_n er reelle tall. Et **system med lineære likninger** (eller et **lineært system**) er en samling med en eller flere lineære likninger. F.eks.

$$2x_1 - x_2 + 1.5x_3 = 8$$

$$x_1 - 4x_3 = -7$$

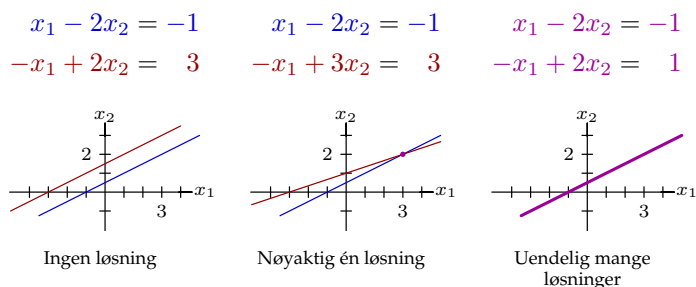
En sekvens av n tall (x_1, \dots, x_n) kalles et **n -tupel**. Et n -tupel kan oppfattes som koordinatene til et punkt i n -dimensjoner. (Den euklidske) avstanden mellom to punkter $A = (a_1, \dots, a_n)$ og $B = (b_1, \dots, b_n)$ i n dimensjoner defineres som tallet

$$d = \sqrt{(a_1 - b_1)^2 + \dots + (a_n - b_n)^2}$$

Vi har følgende regneregler for n -tupler:

$$\begin{aligned} A + B &= (a_1 + b_1, \dots, a_n + b_n) \\ A - B &= (a_1 - b_1, \dots, a_n - b_n) \\ tA &= (ta_1, \dots, ta_n) \\ A \cdot B &= a_1 b_1 + \dots + a_n b_n \quad (\text{prikkprodukt}) \end{aligned}$$

En løsning av systemet er et n -tupel (s_1, \dots, s_n) som gjør at hver likning stemmer når man bytter ut x_1, \dots, x_n med s_1, \dots, s_n . Samlingen av alle mulige løsninger kalles **løsningsmengden**. To lineære systemer kalles **ekvivalente** hvis de har samme løsningsmengde. Å finne løsningsmengden til et system med to lineære likninger med to variable med reelle koeffisienter er ekvivalent med å finne ut hvor to linjer krysser hverandre. F.eks:



Et lineært system er **konsistent** hvis det har minst en løsning og er **ukonsistent** hvis det ikke har noen løsning. Et lineært system kan representeres med en matrise. F.eks. gitt det lineære systemet

$$\begin{aligned} x_1 - 2x_2 + x_3 &= 0 \\ -4x_1 + 5x_2 + 9x_3 &= -9 \\ 2x_2 - 8x_3 &= 8 \end{aligned}$$

så kan man representere koeffisientene i systemet med følgende **koeffisientmatrise**:

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -4 & 5 & 9 \\ 0 & 2 & -8 \end{bmatrix}$$

Hele det lineære systemet kan representeres med følgende **augmenterte matrise**:

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 & 0 \\ -4 & 5 & 9 & -9 \\ 0 & 2 & -8 & 8 \end{bmatrix}$$

Størrelsen til en matrise sier hvor mange rader og kolonner den har. Den augmenterte matrisa ovenfor har 3 rader og 4 kolonner. En **$m \times n$ matrise** (" m ganger n matrise") er en matrise med m rader og n kolonner. m og n trenger ikke å være forskjellige tall. Hvis to matriser er ekvivalente bruker man tegnet \sim mellom dem. Tre grunnleggende **radoperasjoner** kan benyttes på lineære systemer uten at det påvirker løsningsmengden:

- (erstatning) Erstatte en rad med summen av seg selv og en multiplert av en annen rad.
- (ombytting) Bytte om to rader.
- (skalering) Gange alle tall i en rad med et tall ulik 0.

Eksempel 1: Erstatte **rad 2** med (**rad 2**) + (**4 ganger rad 1**):

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 & 0 \\ -4 & 5 & 9 & -9 \\ 0 & 2 & -8 & 8 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 & 0 \\ -4+4 \cdot 1 & 5+4 \cdot (-2) & 9+4 \cdot 1 & -9+4 \cdot 0 \\ 0 & 2 & -8 & 8 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 13 & -9 \\ 0 & 2 & -8 & 8 \end{bmatrix}$$

Eksempel 2: Bytter **rad 2** med **rad 3**:

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 13 & -9 \\ 0 & 2 & -8 & 8 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -8 & 8 \\ 0 & -3 & 13 & -9 \end{bmatrix}$$

Eksempel 3: Ganger alle tall i **rad 2** med $\frac{1}{2}$:

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -8 & 8 \\ 0 & -3 & 13 & -9 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & -4 & 4 \\ 0 & -3 & 13 & -9 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -4 & 4 \\ 0 & -3 & 13 & -9 \end{bmatrix}$$

En **enhetsmatrise** av størrelse $n \times n$ er en kvadratisk matrise med 1 langs diagonalen fra øverste venstre hjørne til nederste høyre hjørne og 0 ellers. Eksempel på en 3×3 enhetsmatrise:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Ved å bruke radoperasjonene for å få koeffisientmatrisen mest mulig lik en enhetsmatrise kalles **radredusering**. Gjennom det med eksempelmatrisen ovenfor får man følgende:

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -4 & 4 \\ 0 & -3 & 13 & -9 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 29 \\ 0 & 1 & 0 & 16 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

Og man har funnet en unik løsning på det opprinnelige systemet med $s_1 = 29, s_2 = 16, s_3 = 3$. To matriser er **radekvivalente** hvis det finnes en rekkefølge av elementære radoperasjoner som transformerer den ene matrisen til den andre. Hvis de augmenterte matrisene til to lineære systemer er radekvivalente så har systemene samme løsningsmengde. En **nullrad** er en rad der alle tall er 0. Hvis en augmentert matrise på redusert trappeform har minst en nullrad, har systemet minst en **fri variabel**, og systemet har uendelig mange løsninger. F.eks.

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -5 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{Tilsvare systemet} \quad \begin{aligned} x_1 - 5x_3 &= 1 \\ x_2 + x_3 &= 4 \\ 0 &= 0 \end{aligned}$$

Variablene x_1 og x_2 kalles **ledende variable**, mens x_3 her er en fri variabel. Slike konsistente systemer kan skrives som en **generell løsning** ved å løse det reduserte likningssystemet mhp de ledende variablene:

$$\begin{cases} x_1 = 1 + 5x_3 \\ x_2 = 4 - x_3 \\ x_3 \text{ er fri} \end{cases}$$

Her står løsningen på **parameterform** der x_3 er en parameter, men kan også skrives på følgende måte:

$$\begin{cases} x_1 = 1 + 5t \\ x_2 = 4 - t \\ x_3 = t \end{cases}$$

Her er t parameteren i løsningen som kan skrives som en 3-tupel på følgende **generelle form**:

$$(1 + 5t, 4 - t, t), \quad t \in \mathbb{R}$$

I dette tilfellet har systemet én fri variabel som gir én parameter i den generelle løsningen. Løsningsmengden er dermed endimensjonal (alle løsningene ligger på en linje). Løsningsmengdens **dimensjon** er altså systemets antall frie variable.

Determinanter

Det generelle likningssystemet

$$\begin{aligned} ax_1 + bx_2 &= p \\ cx_1 + dx_2 &= q \end{aligned}$$

Kan løses slik:

$$\begin{bmatrix} a & b & p \\ c & d & q \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & \frac{dp-bq}{ad-bc} \\ 0 & 1 & \frac{aq-cp}{ad-bc} \end{bmatrix}$$

Som gir

$$x_1 = \frac{dp - bq}{ad - bc}, \quad x_2 = \frac{aq - cp}{ad - bc}$$

Dette betyr at det generelle 2×2 -systemet har en entydig bestemt løsning når den såkalte **determinanten** $ad - bc \neq 0$. Hvis vi har følgende generelle system av n likninger med n ukjente:

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + \dots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ a_{21}x_1 + \dots + a_{2n}x_n &= b_2 \\ \dots & \\ a_{n1}x_1 + \dots + a_{nn}x_n &= b_n \end{aligned}$$

så kalles systemet **homogent** hvis $b_1 = b_2 = \dots = b_n = 0$ og **inhomogent** hvis minst en $b_i \neq 0$. Generelt kan vi da si at hvis D er determinanten til et lineært likningssystem med n likninger med n ukjente så har vi følgende fire muligheter:

	$D \neq 0$	$D = 0$
inhomogent	entydig bestemt løsning	enten uendelig mange løsninger, eller ingen løsninger
homogent	kun triviell løsning $x_1 = x_2 = \dots = x_n = 0$	uendelig mange ikke-trivielle løsninger

Determinanten til en 2×2 -matrise er:

$$\det \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$$

Determinanten til en 3×3 -matrise er:

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = a \begin{vmatrix} e & f \\ h & i \end{vmatrix} - b \begin{vmatrix} d & f \\ g & i \end{vmatrix} + c \begin{vmatrix} d & e \\ g & h \end{vmatrix}$$

For $n \geq 3$ kan determinanten til en $n \times n$ -matrise defineres rekursivt på følgende måte:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$= a_{11} \det(M_1) - a_{12} \det(M_2) + \dots + (-1)^{n+1} a_{1n} \det(M_n)$$

der $\det(M_i)$ er determinanten til den $(n-1) \times (n-1)$ -matrisen som kommer frem når vi stryker rad 1 og kolonne i .

Cramers regel

La $D \neq 0$ være determinanten til likningssystemet

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + \dots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ a_{21}x_1 + \dots + a_{2n}x_n &= b_2 \\ \dots & \\ a_{n1}x_1 + \dots + a_{nn}x_n &= b_n \end{aligned}$$

Da har likningssystemet løsningen

$$x_1 = \frac{\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ b_2 & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_n & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}}{D},$$

$$x_2 = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & b_2 & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & b_n & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}}{D},$$

$$\dots, x_n = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & b_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & b_n \end{vmatrix}}{D}$$

Summen/differansen av to matriser

Dette er definert for to matriser som er like store:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} \pm \begin{bmatrix} b_{11} & \dots & b_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ b_{m1} & \dots & b_{mn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} \pm b_{11} & \dots & a_{1n} \pm b_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} \pm b_{m1} & \dots & a_{mn} \pm b_{mn} \end{bmatrix}$$

Skalering av en matrise

En matrise kan ganges med et tall; Man ganger da alle tallene i matrisa med tallet:

$$c \begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c \cdot a_{11} & \dots & c \cdot a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ c \cdot a_{m1} & \dots & c \cdot a_{mn} \end{bmatrix}$$

Produktet av to matriser

Hvis antall kolonner i en matrise likt antall rader i en annen matrise, så kan de ganges sammen som i eksempelet her:

$$\begin{array}{c|c} & B \\ \hline A & A \cdot B \end{array} = \begin{array}{c|c} & \begin{bmatrix} 2 & 17 & 3 & 4 \\ 15 & 7 & -8 & 4 \\ -3 & 27 & 11 & -4 \end{bmatrix} \\ \hline \begin{bmatrix} 1 & 4 & -2 \\ 0 & 13 & 7 \\ 2 & 3 & 4 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 68 & -9 & -51 & 28 \\ 174 & 280 & -27 & 24 \\ 37 & 163 & 26 & 4 \end{bmatrix} \end{array}$$

Feks. så har -27 her kommet frem ved å plusse sammen produktet av tall fra 2. rad i A og 3. kolonne i B slik:

$$0 \cdot 3 + 13 \cdot (-8) + 7 \cdot 11 = -27$$

Regneregler for matriser

La A, B, C være vilkårlige matriser, I enhetsmatrisen og 0 være matrisen der alle tallene er lik null. Vi har da følgende regler for matriseregning (der størrelsene på matrisene er slik at den aktuelle formelen gir mening):

$$\begin{aligned}A + B &= B + A \\A + (B + C) &= (A + B) + C \\A + 0 &= 0 + A = A \\A - A &= 0 \\A(BC) &= (AB)C \\AI &= IA = A \\A(B + C) &= AB + AC\end{aligned}$$

I tillegg er operasjonen A^k der $k \in \mathbb{N}$ definert som å gange A med seg selv k ganger. M^0 er definert til å være lik I .

Den inverse til en matrise

Hvis A er en kvadratisk matrise, så er A^{-1} definert slik at

$$A^{-1} \cdot A = A \cdot A^{-1} = I$$

En matrise A er inverterbar $\Leftrightarrow \det A \neq 0$

Inversen til en 2×2 -matrise er

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$$

Inverser i likningsløsning

Hvis $Y = AX$ og $|A| \neq 0$ så er $X = A^{-1}Y$

Negative eksponenter

Vi definerer

$$A^{-k} = (A^{-1})^k \quad k \in \mathbb{N}$$

Dette fører til at

$$A^p A^q = A^{p+q} \quad \text{og} \quad (A^p)^q = A^{pq}$$

Inversen til et produkt

$$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$$

Om dette heftet

Dette heftet er laget som en skreddersydd formelsamling til et forkurs i anvendt matematikk ved UiA i Grimstad. En del av stoffet er oversettelser av definisjoner og teoremer fra Gulliksen (1998). Noe stoff er også inspirert av formelsamlingen til Utdanningsdirektoratet (2001). Kommentarer og rettelser er meget velkomne, og medfører finnerlønn ved alvorlige feil.

Dette er versjon 21. Siste versjon bør ligge her:

trondal.com/anvendt.pdf

© © © Jostein Trondal, 7. mai 2009
jostein@trondal.no

Referanser

- Gulliksen, T. (1998). *Matematikk i praksis*. Universitetsforlaget.
Utdanningsdirektoratet. (2001). *Formelsamling i matematikk*. Gyldendal.