

**Algebra**  $a, b, c, x \in \mathbb{R}$

- 1. Kvadratsetning:  $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$
- 2. Kvadratsetning:  $(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$
- Konjugatsetningen:  $(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$
- Kvadratrotkonjugat:  $(\sqrt{a} + \sqrt{b})(\sqrt{a} - \sqrt{b}) = a - b$
- Komplekskonjugat:  $(a + bi)(a - bi) = a^2 + b^2$
- Andregradslikningen:  $ax^2 + bx + c = 0 \Rightarrow x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$
- Fullstendig kvadrat:  $ax^2 + bx + c = a(x + \frac{b}{2a})^2 + c - \frac{b^2}{4a}$

**Potenser, røtter, logaritmer**  $a, b, n, m \in \mathbb{R}^+$   $r \in \mathbb{R}$   $k \in \mathbb{N}$

$$a^k = \overbrace{a \cdot a \cdot \dots \cdot a}^{k \text{ ganger}}$$

$$a^n = e^{n \cdot \ln a}$$

$$a^0 = 1$$

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n}$$

$$a^{m+n} = a^m \cdot a^n$$

$$a^{m-n} = \frac{a^m}{a^n}$$

$$a^{m \cdot n} = (a^m)^n$$

$$(a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n$$

$$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$$

$$0^n = 0$$

$$0^{-n} = \frac{1}{0^n} = \frac{1}{0} = \emptyset$$

$$(-1)^k = 1 \quad (k \text{ partall})$$

$$(-1)^k = -1 \quad (k \text{ oddetall})$$

$$(-a)^k = (-1)^k \cdot a^k$$

$$(-a)^{-k} = \frac{(-1)^k}{a^k}$$

$$(-a)^0 = 1$$

$$a^{1/n} = x \text{ slik at } x^n = a$$

$$\sqrt[n]{a} = a^{1/n}$$

$$\sqrt{a} = \sqrt[2]{a} = a^{1/2}$$

$$\sqrt[n]{a^m} = a^{m/n} = (a^m)^{1/n}$$

$$\sqrt[n]{a \cdot b} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}$$

$$\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$$

$$\sqrt{a^2 \cdot b} = a \cdot \sqrt{b}$$

$$0^0 = 1 \text{ eller } \emptyset$$

$$k! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot k$$

$$\ln(a \cdot b) = \ln a + \ln b$$

$$\ln\left(\frac{a}{b}\right) = \ln a - \ln b$$

$$\ln(a^r) = r \cdot \ln a$$

$$e^{\ln a} = a$$

$$\ln e^r = r$$

**Trigonometriske identiteter**

$$\sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1$$

$$\sin 2\theta = 2 \sin \theta \cos \theta$$

$$\sin \theta \cos \theta = \frac{1}{2} \sin 2\theta$$

$$\cos 2\theta = \cos^2 \theta - \sin^2 \theta$$

$$= 2 \cos^2 \theta - 1$$

$$= 1 - 2 \sin^2 \theta$$

**Komplekse tall**  $i = \sqrt{-1}$   $z = a + ib$

$z = a + ib$  har **realdel**  $\text{Re}(z) = a$  og **imaginærdel**  $\text{Im}(z) = b$ .

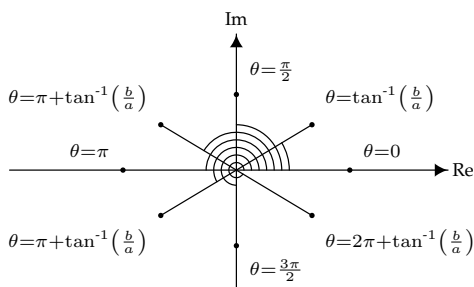
$$z_1 \pm z_2 = (a_1 \pm a_2) + i(b_1 \pm b_2)$$

$$z_1 \cdot z_2 = (a_1 a_2 - b_1 b_2) + i(a_1 b_2 + b_1 a_2)$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{a_1 + ib_1}{a_2 + ib_2} \cdot \frac{a_2 - ib_2}{a_2 - ib_2} = \frac{(a_1 a_2 + b_1 b_2) + i(a_2 b_1 - a_1 b_2)}{a_2^2 + b_2^2}$$

$$\frac{1}{z} = \frac{a - ib}{a^2 + b^2}$$

$z = a + ib$  ligger i det komplekse tallplanet ved koordinatet  $(a, b)$ . Vinkelen  $\theta = \text{Arg}(z)$  til tallet avhenger av hvor tallet ligger i forhold til kvadrantene, jfr figuren til høyre.



$$r = |z| = \sqrt{a^2 + b^2} \quad (\text{Tallets lengde})$$

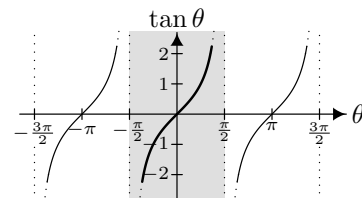
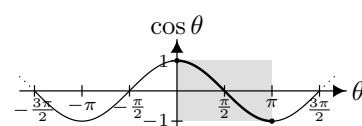
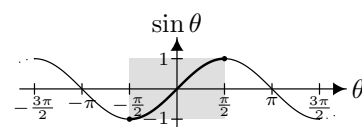
$$z = r e^{i\theta} \quad (\text{Polarform})$$

$$z = |z|(\cos \theta + i \sin \theta)$$

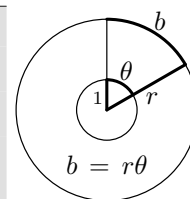
$$z^n = |z|^n (\cos n\theta + i \sin n\theta)$$

$$z^{1/n} = |z|^{1/n} \left( \cos\left(\frac{\theta + 2k\pi}{n}\right) + i \sin\left(\frac{\theta + 2k\pi}{n}\right) \right)$$

$\theta$	grader	$\sin \theta$	$\cos \theta$	$\tan \theta$
0	0°	0	1	0
$\frac{\pi}{6}$	30°	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$
$\frac{\pi}{4}$	45°	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1
$\frac{\pi}{3}$	60°	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\sqrt{3}$
$\frac{\pi}{2}$	90°	1	0	$\pm \infty$
$\frac{2\pi}{3}$	120°	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$-\sqrt{3}$
$\frac{3\pi}{4}$	135°	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	-1
$\frac{5\pi}{6}$	150°	$\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$
$\pi$	180°	0	-1	0
$\frac{7\pi}{6}$	210°	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$
$\frac{5\pi}{4}$	225°	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	1
$\frac{4\pi}{3}$	240°	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$\sqrt{3}$
$\frac{3\pi}{2}$	270°	-1	0	$\pm \infty$
$\frac{5\pi}{3}$	300°	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$-\sqrt{3}$
$\frac{7\pi}{4}$	315°	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	-1
$\frac{11\pi}{6}$	330°	$-\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$
$2\pi$	360°	0	1	0



$\theta - 2\pi$  grader



**Derivasjon**

$$(t^n)' = nt^{n-1}$$

$$(cu)' = cu'$$

$$(u+v)' = u' + v'$$

$$(uv)' = u'v + uv'$$

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$$

$$(e^t)' = e^t$$

$$(a^t)' = a^t \ln a$$

$$(\sin t)' = \cos t$$

$$(\cos t)' = -\sin t$$

$$(\tan t)' = \frac{1}{\cos^2 t}$$

$$(\sin^{-1} t)' = \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}$$

$$(\cos^{-1} t)' = -\frac{1}{\sqrt{1-t^2}}$$

$$(\tan^{-1} t)' = \frac{1}{1+t^2}$$

$$(\ln t)' = \frac{1}{t}, \quad t > 0$$

$$(g(u))' = g'(u)u'$$

**Integrasjon**

$$\int t^n dt = \frac{1}{n+1} t^{n+1} + c$$

$$\int \frac{1}{t} dt = \ln |t| + c$$

$$\int \frac{1}{at+b} dt = \frac{1}{a} \ln |at+b| + c$$

$$\int \sin at dt = -\frac{1}{a} \cos at + c$$

$$\int \cos at dt = \frac{1}{a} \sin at + c$$

$$\int a^t dt = \frac{1}{\ln a} a^t + c$$

$$\int \frac{dt}{a^2+t^2} = \frac{1}{a} \tan^{-1}\left(\frac{t}{a}\right) + c$$

$$\int \frac{dt}{\sqrt{a^2-t^2}} = \sin^{-1}\left(\frac{t}{a}\right) + c$$

$$\int \frac{1}{\cos^2 t} dt = \tan t + c$$

$$\int \frac{1}{\sin^2 t} dt = -\frac{1}{\tan t} + c$$

$$\int e^{at} dt = \frac{1}{a} e^{at} + c$$

$$\int u dv = uv - \int v du$$

$$\int_a^b f(t)g'(t) dt = f(t)g(t) \Big|_a^b - \int_a^b f'(t)g(t) dt$$

$$\frac{d}{dx} \int_{u(x)}^{v(x)} f(t) dt = f(v(x)) \frac{dv}{dx} - f(u(x)) \frac{du}{dx}$$

$$\int_a^b f(g(x)) \cdot g'(x) dx = \int_{g(a)}^{g(b)} f(u) du$$

$$\int e^{at} \cos bt dt = \frac{e^{at}}{a^2+b^2} (a \cos bt + b \sin bt) + c$$

$$\int e^{at} \sin bt dt = \frac{e^{at}}{a^2+b^2} (a \sin bt - b \cos bt) + c$$

$$\int t e^{\frac{1}{2}t^2} dt = e^{\frac{1}{2}t^2} + c$$

# Lineær algebra

En **lineær likning** med variabler  $x_1, \dots, x_n$  kan skrives

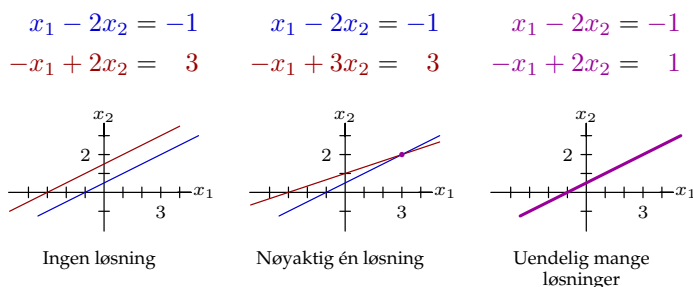
$$a_1x_1 + a_2x_2 + \dots + a_nx_n = b$$

der  $b$  og **koeffisientene**  $a_1, \dots, a_n$  er reelle eller komplekse tall. Et **system med lineære likninger** (eller et **lineært system**) er en samling med en eller flere lineære likninger.

F.eks.

$$\begin{aligned} 2x_1 - x_2 + 1.5x_3 &= 8 \\ x_1 - 4x_3 &= -7 \end{aligned}$$

En løsning av systemet er en liste  $(s_1, \dots, s_n)$  med tall som gjør at hver likning stemmer når man bytter ut  $x_1, \dots, x_n$  med  $s_1, \dots, s_n$ . Samlingen av alle mulige løsninger kalles **løsningsmengden**. To lineære systemer kalles **ekvivalente** hvis de har samme løsningsmengde. Å finne løsningsmengden til et system med to lineære likninger med to variable med reelle koeffisienter er ekvivalent med å finne ut hvor to linjer krysser hverandre. F.eks:



Et lineært system har enten

1. Ingen løsning, eller
2. Nøyaktig én løsning, eller
3. Uendelig mange løsninger

Et lineært system er **konsistent** hvis det har minst en løsning og er **inkonsistent** hvis det ikke har noen løsning. Et lineært system kan representeres med en matrise. F.eks. gitt det lineære systemet

$$\begin{aligned} x_1 - 2x_2 + x_3 &= 0 \\ -4x_1 + 5x_2 + 9x_3 &= -9 \\ 2x_2 - 8x_3 &= 8 \end{aligned}$$

så kan man representere koeffisientene i systemet med følgende **koeffisientmatrise**:

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -4 & 5 & 9 \\ 0 & 2 & -8 \end{bmatrix}$$

Hele det lineære systemet kan representeres med følgende **augmenterte matrise**:

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 & 0 \\ -4 & 5 & 9 & -9 \\ 0 & 2 & -8 & 8 \end{bmatrix}$$

**Størrelsen** til en matrise sier hvor mange rader og kolonner den har. Den augmenterte matrisa ovenfor har 3 rader

og 4 kolonner. En  $m \times n$  **matrise** ("m ganger n matrise") er en matrise med  $m$  rader og  $n$  kolonner.  $m$  og  $n$  trenger ikke å være forskjellige tall. Hvis to matriser er ekvivalente bruker man tegnet  $\sim$  mellom dem. Tre grunnleggende **radoperasjoner** kan benyttes på lineære systemer uten at det påvirker løsningsmengden:

1. (erstatning) Erstatte en rad med summen av seg selv og en multiplert av en annen rad.
2. (ombytting) Bytte om to rader.
3. (skalering) Gange alle tall i en rad med et tall ulik 0.

Eksempel 1: Erstatte **rad 2** med (**rad 2**) + (**4 ganger rad 1**):

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 & 0 \\ -4 & 5 & 9 & -9 \\ 0 & 2 & -8 & 8 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 & 0 \\ -4+4 \cdot 1 & 5+4 \cdot (-2) & 9+4 \cdot 1 & -9+4 \cdot 0 \\ 0 & 2 & -8 & 8 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 13 & -9 \\ 0 & 2 & -8 & 8 \end{bmatrix}$$

Eksempel 2: Bytter **rad 2** med **rad 3**:

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 13 & -9 \\ 0 & 2 & -8 & 8 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -8 & 8 \\ 0 & -3 & 13 & -9 \end{bmatrix}$$

Eksempel 3: Ganger alle tall i **rad 2** med  $\frac{1}{2}$ :

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -8 & 8 \\ 0 & -3 & 13 & -9 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & -4 & 4 \\ 0 & -3 & 13 & -9 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -4 & 4 \\ 0 & -3 & 13 & -9 \end{bmatrix}$$

En **enhetsmatrise** av størrelse  $n \times n$  er en kvadratisk matrise med 1 langs diagonalen fra øverste venstre hjørne til nederste høyre hjørne og 0 ellers. Eksempel på en  $3 \times 3$  enhetsmatrise:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Ved å bruke radoperasjonene for å få koeffisientmatrisen mest mulig lik en enhetsmatrise kalles **radredusering**. Gjør man det med eksempelmatrisen ovenfor får man følgende:

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -4 & 4 \\ 0 & -3 & 13 & -9 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 29 \\ 0 & 1 & -4 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

Og man har funnet en unik løsning på det opprinnelige systemet med  $s_1=1, s_2=16, s_3=3$ . To matriser er **radekvivalente** hvis det finnes en rekkefølge av elementære radoperasjoner som transformerer den ene matrisen til den andre. Hvis de augmenterte matrisene til to lineære systemer er radekvivalente så har systemene samme løsningsmengde.

Et **ledende tall** i en rad er det tallet lengst til venstre i en rad som ikke er lik 0. En **nullrad** er en rad der alle tall er 0. En rad er **ikkenull** om den inneholder minst ett tall som ikke er lik 0. En matrise er på **trappeform** hvis den har følgende tre egenskaper:

1. Alle ikkenull rader ligger over alle eventuelle nullrader.
2. Det ledende tallet i en rad ligger i en kolonne som er til høyre for det ledende tallet i raden over.
3. Alle tall i en kolonne under et ledende tall er lik 0.

Hvis en matrise på trappeform i tillegg har følgende egenskaper, så er matrisa på **redusert trappeform**:

4. Det ledende tallet i alle ikkenull rader er lik 1.
5. Hvert ledende 1-tall er det eneste tallet som ikke er lik 0 i kolonnen.

Følgende matriser er i hhv trappeform og red. trappeform:

$$\begin{bmatrix} 2 & -3 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 4 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 5/2 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 29 \\ 0 & 1 & 0 & 16 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

**TEOREM 1: Enhver matrise er radekvivalent med en og bare en matrise på redusert trappeform.**

En **pivotposisjon** i en matrise  $A$  er en posisjon i  $A$  som korresponderer med et ledende 1-tall i den reduserte trappeformen til  $A$ . En **pivotkolonne** er en kolonne i  $A$  som inneholder en pivotposisjon. En **pivot** er et tall ulik 0 i en pivotposisjon som brukes til å lage 0'er i de andre radene i kolonnen vha radoperasjoner.

Hvis en augmentert matrise på redusert trappeform har minst en nullrad, har systemet minst en **fri variabel**, og systemet har uendelig mange løsninger. F.eks.

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -5 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{Tilsvare systemet} \quad \begin{cases} x_1 - 5x_3 = 1 \\ x_2 + x_3 = 4 \\ 0 = 0 \end{cases}$$

Variablene  $x_1$  og  $x_2$  kalles **ledende variable**, mens  $x_3$  her er en fri variabel. Slike konsistente systemer kan skrives som en **generell løsning** ved å løse det reduserte likningssystemet mhp de ledende variablene:

$$\begin{cases} x_1 = 1 + 5x_3 \\ x_2 = 4 - x_3 \\ x_3 \text{ er fri} \end{cases}$$

Her står løsningen på **parameterform**, men kan også omformes til **parametriske vektorform** slik:

$$\vec{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 + 5x_3 \\ 4 - x_3 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \\ 0 \end{bmatrix} + x_3 \begin{bmatrix} 5 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \vec{x} = \vec{p} + t\vec{v} \quad \text{der} \quad \vec{p} = \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \vec{v} = \begin{bmatrix} 5 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \text{og} \quad t \in \mathbb{R}$$

**TEOREM 2: Eksistens og entydighetsteorem. Et lineært system er konsistent hvis og bare hvis kolonnen lengst til høyre i en augmentert matrise ikke er en pivotkolonne, dvs hvis og bare hvis en trappeform av den augmenterte matrisa ikke har noen rad på formen**

$$[0 \quad \dots \quad 0 \quad b] \quad \text{der} \quad b \neq 0$$

Hvis systemet er konsistent, da inneholder løsningsmengden enten (i) en unik løsning uten fri variabler eller (ii) uendelig mange løsninger med minst en fri variabel.

En matrise med kun én kolonne kalles en **kolonnevektor**, eller bare en **vektor**. Et hvert punkt i  $n$  dimensjoner kan representeres med en vektor med  $n$  rader. Det geometriske punktet  $(a, b)$  i  $\mathbb{R}^2$  kan identifiseres med vektoren  $\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$ . To vanlige notasjoner for vektorer som variabler er enten fet skrift:  $\mathbf{v} = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$ , eller pil over bokstav:  $\vec{v} = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$ .

Addisjon og subtraksjon av vektorer gjøres rad for rad:

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1+3 \\ 2+4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 6 \end{bmatrix}$$

Gitt  $\vec{v}$  og  $c \in \mathbb{R}$  så er  $c \cdot \vec{v}$  en **skalar multipl** av  $\vec{v}$ :

$$\vec{v} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} \quad \text{og} \quad c = 3 \quad \Rightarrow \quad c\vec{v} = 3 \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 6 \end{bmatrix}$$

En **nullvektor** er en vektor der alle tallene er lik 0, og kan skrives som  $\vec{0}$ . For alle  $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$  i  $\mathbb{R}^n$  og  $c, d \in \mathbb{R}$  har vi:

- (i)  $\vec{u} + \vec{v} = \vec{v} + \vec{u}$
- (ii)  $(\vec{u} + \vec{v}) + \vec{w} = \vec{u} + (\vec{v} + \vec{w})$
- (v)  $c(\vec{u} + \vec{v}) = c\vec{u} + c\vec{v}$
- (vi)  $(c+d)\vec{u} = c\vec{u} + d\vec{u}$

**Summen/differansen av to matriser**

Dette er definert for to matriser som er like store:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} \pm \begin{bmatrix} b_{11} & \dots & b_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ b_{m1} & \dots & b_{mn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} \pm b_{11} & \dots & a_{1n} \pm b_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} \pm b_{m1} & \dots & a_{mn} \pm b_{mn} \end{bmatrix}$$

**Skalering av en matrise**

En matrise kan ganges med et tall; Man ganger da alle tallene i matrisa med tallet:

$$c \begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c \cdot a_{11} & \dots & c \cdot a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ c \cdot a_{m1} & \dots & c \cdot a_{mn} \end{bmatrix}$$

**Produktet av to matriser**

Hvis antall kolonner i en matrise likt antall rader i en annen matrise, så kan de ganges sammen som i eksempelet her:

$$\begin{array}{c|ccc} & B & & \\ \hline A & A \cdot B & & \end{array} = \begin{array}{ccc|ccc} & 2 & 17 & 3 & 4 \\ & 15 & 7 & -8 & 4 \\ & -3 & 27 & 11 & -4 \\ \hline & 1 & 4 & -2 & & 68 & -9 & -51 & 28 \\ 0 & 13 & 7 & & & 174 & 280 & -27 & 24 \\ 2 & 3 & 4 & & & 37 & 163 & 26 & 4 \end{array}$$

F.eks. så har  $-27$  her kommet frem ved å plusse sammen produktet av tall fra 2. rad i  $A$  og 3. kolonne i  $B$  slik:

$$0 \cdot 3 + 13 \cdot (-8) + 7 \cdot 11 = -27$$

**Regneregler for matriser**

La  $A, B, C$  være vilkårlige matriser,  $I$  enhetsmatrisen og  $0$  være matrisen der alle tallene er lik null. Vi har da følgende regler for matriseregning (der størrelsene på matrisene er slik at den aktuelle formelen gir mening):

$$\begin{aligned} A + B &= B + A \\ A + (B + C) &= (A + B) + C \\ A + 0 &= 0 + A = A \\ A - A &= 0 \\ A(BC) &= (AB)C \\ AI &= IA = A \\ A(B + C) &= AB + AC \end{aligned}$$

I tillegg er operasjonen  $A^k$  der  $k \in \mathbb{N}$  definert som å gange  $A$  med seg selv  $k$  ganger.  $M^0$  er definert til å være lik  $I$ .

**Den inverse til en matrise**

Hvis  $A$  er en kvadratisk matrise, så er  $A^{-1}$  definert slik at

$$A^{-1} \cdot A = A \cdot A^{-1} = I$$

En matrise  $A$  er inverterbar  $\Leftrightarrow \det A \neq 0$

Inversen til en  $2 \times 2$ -matrise er

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$$

## Inverser i likningsløsning

Hvis  $Y = AX$  og  $|A| \neq 0$  så er  $X = A^{-1}Y$

## Negative eksponenter

Vi definerer

$$A^{-k} = (A^{-1})^k \quad k \in \mathbb{N}$$

Dette fører til at

$$A^p A^q = A^{p+q} \quad \text{og} \quad (A^p)^q = A^{pq}$$

## Inversen til et produkt

$$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$$

## Determinanter

Det generelle likningssystemet

$$\begin{aligned} ax_1 + bx_2 &= p \\ cx_1 + dx_2 &= q \end{aligned}$$

Kan løses slik:

$$\begin{bmatrix} a & b & p \\ c & d & q \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & \frac{dp-bq}{ad-bc} \\ 0 & 1 & \frac{aq-cp}{ad-bc} \end{bmatrix}$$

Som gir

$$x_1 = \frac{dp - bq}{ad - bc}, \quad x_2 = \frac{aq - cp}{ad - bc}$$

Dette betyr at det generelle  $2 \times 2$ -systemet har en entydig bestemt løsning når den såkalte **determinanten**  $ad - bc \neq 0$ . Hvis vi har følgende generelle system av  $n$  likninger med  $n$  ukjente:

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + \dots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ a_{21}x_1 + \dots + a_{2n}x_n &= b_2 \\ \dots & \\ a_{n1}x_1 + \dots + a_{nn}x_n &= b_n \end{aligned}$$

så kalles systemet **homogent** hvis  $b_1 = b_2 = \dots = b_n = 0$  og **inhomogent** hvis minst en  $b_i \neq 0$ . Generelt kan vi da si at hvis  $D$  er determinanten til et lineært likningssystem med  $n$  likninger med  $n$  ukjente så har vi følgende fire muligheter:

	$D \neq 0$	$D = 0$
inhomogent	entydig bestemt løsning	enten uendelig mange løsninger, eller ingen løsninger
homogent	kun triviell løsning $x_1 = x_2 = \dots = x_n = 0$	uendelig mange ikke-trivielle løsninger

Determinanten til en  $2 \times 2$ -matrise er:

$$\det \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$$

Determinanten til en  $3 \times 3$ -matrise er:

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = a \begin{vmatrix} e & f \\ h & i \end{vmatrix} - b \begin{vmatrix} d & f \\ g & i \end{vmatrix} + c \begin{vmatrix} d & e \\ g & h \end{vmatrix}$$

For  $n \geq 3$  kan determinanten til en  $n \times n$ -matrise defineres rekursivt på følgende måte:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$= a_{11} \det(M_1) - a_{12} \det(M_2) + \dots + (-1)^{n+1} a_{1n} \det(M_n)$$

der  $\det(M_i)$  er determinanten til den  $(n-1) \times (n-1)$ -matrisen som kommer frem når vi stryker rad 1 og kolonne  $i$ .

## Determinant ved kofaktorekspansjon

Kofaktorekspansjon av  $\begin{vmatrix} -11 & 2 & 17 & 4 \\ 7 & 3 & 9 & 5 \\ 2 & 8 & -7 & 4 \\ 3 & 4 & 3 & 4 \end{vmatrix}$  langs 3. kolonne:

$$\begin{aligned} & \begin{vmatrix} -11 & 2 & \boxed{17} & 4 \\ 7 & 3 & \boxed{9} & 5 \\ 2 & 8 & -7 & 4 \\ 3 & 4 & \boxed{3} & 4 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} -11 & 2 & 17 & 4 \\ 7 & 3 & \boxed{9} & 5 \\ 2 & 8 & -7 & 4 \\ 3 & 4 & 3 & 4 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} -11 & 2 & 17 & 4 \\ 7 & 3 & 9 & 5 \\ 2 & 8 & \boxed{-7} & 4 \\ 3 & 4 & 3 & 4 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} -11 & 2 & 17 & 4 \\ 7 & 3 & 9 & 5 \\ 2 & 8 & -7 & 4 \\ 3 & 4 & \boxed{3} & 4 \end{vmatrix} \\ (-1)^{1+3} \cdot 17 \cdot \begin{vmatrix} 7 & 3 & 5 \\ 2 & 8 & 4 \\ 3 & 4 & 4 \end{vmatrix} & (-1)^{2+3} \cdot 9 \cdot \begin{vmatrix} -11 & 2 & 4 \\ 2 & 8 & 4 \\ 3 & 4 & 4 \end{vmatrix} & (-1)^{3+3} \cdot (-7) \cdot \begin{vmatrix} -11 & 2 & 4 \\ 7 & 3 & 5 \\ 3 & 4 & 4 \end{vmatrix} & (-1)^{4+3} \cdot 3 \cdot \begin{vmatrix} -11 & 2 & 4 \\ 7 & 3 & 5 \\ 2 & 8 & 4 \end{vmatrix} \\ = 17 \cdot 44 & = (-9) \cdot (-232) & = (-7) \cdot 138 & = (-3) \cdot 472 \\ = 748 & = 2088 & = -966 & = -1416 \end{aligned}$$

$$\text{Det} = 748 + 2088 - 966 - 1416 = 454$$

## Cramers regel

La  $D \neq 0$  være determinanten til koeffisientmatrisen til likningssystemet

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + \dots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ a_{21}x_1 + \dots + a_{2n}x_n &= b_2 \\ \dots & \\ a_{n1}x_1 + \dots + a_{nn}x_n &= b_n \end{aligned}$$

Da har likningssystemet løsningen

$$x_1 = \frac{\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ b_2 & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_n & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}}{D},$$

$$x_2 = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & b_2 & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & b_n & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}}{D},$$

$$\dots, x_n = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & b_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & b_n \end{vmatrix}}{D}$$

## Eigenverdi og egenvektor

La  $A$  være en kvadratisk matrise. Et tall  $\lambda$  kalles en **eigenverdi** for  $A$  hvis det finnes en vektor  $\vec{x} \neq 0$  slik at

$$A\vec{x} = \lambda\vec{x}$$

$\vec{x}$  kalles en **egenvektor** for  $A$  med  $\lambda$  som **tilhørende eigenverdi**. Vi har da at

$$A^k\vec{x} = \lambda^k\vec{x}$$

Eigenverdiene til matrisen  $A$  er de tallene  $\lambda$  som gir

$$\det(A - \lambda I) = 0$$

## Metode for å finne eigenverdiene og egenvektorene

1. Regn ut determinanten  $\det(A - \lambda I)$ , som blir et polynom i  $\lambda$  av grad  $n$ .
2. Løs likningen  $\det(A - \lambda I) = 0$ . Eigenverdiene til  $A$  er alle løsningene  $\lambda$  av denne likningen. Eventuelle komplekse løsninger regnes også som eigenverdier til  $A$ .
3. For hver reell eigenverdi  $\lambda$ , løs likningen  $(A - \lambda I)X = 0$ . De løsningene  $X$  som ikke er lik 0, er egenvektorene til  $A$  med  $\lambda$  som tilhørende eigenverdi.

**Lengden** (eller **normen**) til  $\vec{v}$  er den ikke-negative skalaren

$$\|\vec{v}\| = \sqrt{\vec{v} \bullet \vec{v}} = \sqrt{v_1^2 + v_2^2 + \dots + v_n^2} \quad \text{og} \quad \|\vec{v}\|^2 = \vec{v} \bullet \vec{v}$$

## Gram-Schmidt-prosessen

Hvis  $\{\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_p\}$  er en basis for et underrom  $W$  i  $\mathbb{R}^n$ , så er  $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_p\}$  en ortogonal basis for  $W$  der

$$\begin{aligned}\vec{v}_1 &= \vec{x}_1 \\ \vec{v}_2 &= \vec{x}_2 - \frac{\vec{x}_2 \bullet \vec{v}_1}{\vec{v}_1 \bullet \vec{v}_1} \vec{v}_1 \\ \vec{v}_3 &= \vec{x}_3 - \frac{\vec{x}_3 \bullet \vec{v}_1}{\vec{v}_1 \bullet \vec{v}_1} \vec{v}_1 - \frac{\vec{x}_3 \bullet \vec{v}_2}{\vec{v}_2 \bullet \vec{v}_2} \vec{v}_2 \\ &\vdots \\ \vec{v}_p &= \vec{x}_p - \frac{\vec{x}_p \bullet \vec{v}_1}{\vec{v}_1 \bullet \vec{v}_1} \vec{v}_1 - \frac{\vec{x}_p \bullet \vec{v}_2}{\vec{v}_2 \bullet \vec{v}_2} \vec{v}_2 - \dots - \frac{\vec{x}_p \bullet \vec{v}_{p-1}}{\vec{v}_{p-1} \bullet \vec{v}_{p-1}} \vec{v}_{p-1}\end{aligned}$$

I tillegg så har vi

$$\text{Span}\{\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_k\} = \text{Span}\{\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_k\} \quad \text{for } 1 \leq k \leq p$$

En ortonormal basis  $\{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots, \vec{u}_p\}$  får vi ved å dele hver av vektorene i den ortogonale basisen på sin egen norm:

$$\vec{u}_k = \frac{1}{\|\vec{v}_k\|} \vec{v}_k \quad \text{for } 1 \leq k \leq p$$

## Omforming av uttrykket $a \cos \omega t + b \sin \omega t$

La  $a, b$  og  $\omega$  være gitte tall  $\neq 0$  med  $\omega > 0$ . Funksjonen

$$f(t) = a \cos \omega t + b \sin \omega t$$

kan skrives på formen

$$f(t) = C \cos(\omega(t - t_0))$$

der  $(C, \omega t_0)$  er polarkoordinatene til punktet  $(a, b)$ . Spesielt har vi

$$C = \sqrt{a^2 + b^2} \quad \text{og} \quad \tan(\omega t_0) = \frac{b}{a}$$

Vinkelen  $\omega t_0$  ligger i intervallet  $[0, 2\pi)$  og hører til samme kvadrant som punktet  $(a, b)$ .

## Første ordens inhomogen lineær differensiallikning

$$y' + p(t)y = g(t)$$

har løsningen

$$y = e^{-P(t)} \int e^{P(t)} g(t) dt + C e^{-P(t)}$$

der  $P(t)$  er en vilkårlig antiderivert av  $p(t)$

## Høyere ordens differensiallikninger med konstante koeffisienter

En høyere ordens differensiallikning med konstante koeffisienter er en ligning

$$a_n y^{(n)} + \dots + a_3 y^{(3)} + a_2 y'' + a_1 y' + a_0 y = f(t)$$

## Komplementær / homogen løsning

Den *tilhørende homogene* differensiallikningen får vi ved å bytte ut høyresiden  $f(t)$  med 0. Vi får da

$$a_n y^{(n)} + \dots + a_3 y^{(3)} + a_2 y'' + a_1 y' + a_0 y = 0$$

Vi løser en homogen høyere ordens differensiallikninger med konstante koeffisienter ved først å løse den karakteristiske ligningen

$$a_n r^n + \dots + a_3 r^3 + a_2 r^2 + a_1 r + a_0 = 0$$

som har røtter  $r_1, r_2, \dots, r_n$ . Deretter finner vi løsningene  $y_1, y_2, \dots, y_n$  til den homogene differensiallikningen ved følgende regel:

Hvis  $r_k = a + bi$ , og denne roten har forekommet  $m$  ganger før, er

$$y_k(t) = \begin{cases} t^m e^{at} \cos(bt) & \text{hvis } b \geq 0 & \text{«ploss rimer på cos»} \\ t^m e^{at} \sin(bt) & \text{hvis } b < 0 & \text{«minus rimer på sinus»} \end{cases}$$

Den *komplementære løsningen*  $y_C$  er da

$$y_C = c_1 \cdot y_1 + c_2 \cdot y_2 + \dots + c_n \cdot y_n$$

## Partikulær løsning

Partikulær løsning kan du finne når du kjenner  $y_1, y_2, \dots, y_n$ . Hvis differensiallikningen var av 2. orden har du kun 2 løsninger  $y_1$  og  $y_2$ , og da har du en snarvei for  $y_P$  som ser slik ut (bruk ikke  $+C$  for integralene):

$$y_P = y_1 \cdot \int \frac{-y_2 \cdot f(t)}{|W|} dt + y_2 \cdot \int \frac{y_1 \cdot f(t)}{|W|} dt$$

der  $|W|$  er *Wronski-determinanten* av  $y_1, y_2$ :

$$|W| = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix}$$

Hvis differensialligningen er av orden  $n > 2$ , kan du ikke bruke denne snarveien. Da må du løse følgende matriseligning (Vi anbefaler Cramer's regel!):

$$\begin{bmatrix} y_1 & y_2 & \cdots & y_n \\ y_1' & y_2' & & y_n' \\ \vdots & & & \vdots \\ y_1^{(n-1)} & y_2^{(n-1)} & \cdots & y_n^{(n-1)} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} u_1'(t) \\ u_2'(t) \\ \vdots \\ u_n'(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ f(t) \end{bmatrix}$$

Deretter finner du  $u(t) = \int u'(t)dt$  (bruk ikke  $+C$  for integralene), og til slutt

$$y_P = u_1 \cdot y_1 + u_2 \cdot y_2 + \cdots u_n \cdot y_n$$

### Om dette heftet

Dette heftet er laget som en skreddersydd formelsamling til et kurs i lineær algebra og differensiallikninger ved UiA i Grimstad. En del av stoffet er oversettelser av definisjoner og teoremer fra Lay (2006), Kohler and Johnson (2006) og

Gulliksen (1998). Noe stoff er også inspirert av formelsamlingen til Haugan (2007). Kommentarer og rettelser er meget velkomne, og medfører finnerlønn ved alvorlige feil.

Dette er versjon 6. Siste versjon bør ligge her:

[trondal.com/lindiff.pdf](http://trondal.com/lindiff.pdf)

© © © Jostein Trondal, 20. mai 2009  
jostein@trondal.no

## Referanser

- Gulliksen, T. (1998). *Matematikk i praksis*. Universitetsforlaget.
- Haugan, J. (2007). *Formler og tabeller*. NKI Forlaget.
- Kohler, W., & Johnson, L. (2006). *Elementary differential equations*. Pearson Addison Wesley.
- Lay, D. C. (2006). *Linear algebra and its applications*. Pearson Addison Wesley.

## Laplacetransformasjon

$f(t)$	$\mathcal{L}\{f(t)\} = \int_0^\infty e^{-st} f(t) dt$
$f(t)$	$F(s)$
$af(t) + bg(t)$	$aF(s) + bG(s)$
$f'$	$sF(s) - f(0)$
$f''$	$s^2F(s) - sf(0) - f'(0)$
$f^{(n)}$	$s^n F(s) - s^{n-1}f(0) - \dots - f^{(n-1)}(0)$
$f(t-a)u(t-a)$	$e^{-as}F(s)$
$e^{at}f(t)$	$F(s-a)$
$\int_0^t f(\tau) d\tau$	$\frac{1}{s}F(s)$
$tf(t)$	$-F'(s)$
$\frac{f(t)}{t}$	$\int_s^\infty F(\sigma) d\sigma$

Parallellforskyving:

$f(t)$	$F(s)$
$e^{at}f(t)$	$F(s-a)$

$f(t)$	$F(s)$
$f(t-a)u(t-a)$	$e^{-as}F(s)$

$f(t)$	$\longrightarrow$	$F(s)$		$F(s)$	$\longrightarrow$	$f(t)$
1		$\frac{1}{s}$		1		1
$e^{at}$		$\frac{1}{s-a}$		2		$e^{at}$
$2\sqrt{t/\pi}$		$\frac{1}{s^{3/2}}$		3		$2\sqrt{t/\pi}$
$t^n$		$\frac{n!}{s^{n+1}}$		4		$\frac{1}{(n-1)!}t^{n-1}$
$t^n e^{at}$		$\frac{n!}{(s-a)^{n+1}}$		5		$\frac{1}{(n-1)!}(t^{n-1}e^{at})$
$e^{at} - e^{bt}$		$\frac{a-b}{(s-a)(s-b)}$		6		$\frac{1}{a-b}(e^{at} - e^{bt})$
$ae^{at} - be^{bt}$		$\frac{(a-b)s}{(s-a)(s-b)}$		7		$\frac{1}{a-b}(ae^{at} - be^{bt})$
$\sin \omega t$		$\frac{\omega}{s^2 + \omega^2}$		8		$\frac{1}{\omega} \sin \omega t$
$\cos \omega t$		$\frac{s}{s^2 + \omega^2}$		9		$\cos \omega t$
$e^{at} \sin \omega t$		$\frac{\omega}{(s-a)^2 + \omega^2}$		10		$\frac{1}{\omega} e^{at} \sin \omega t$
$e^{at} \cos \omega t$		$\frac{s-a}{(s-a)^2 + \omega^2}$		11		$e^{at} \cos \omega t$
$\omega t - \sin \omega t$		$\frac{\omega^3}{s^2(s^2 + \omega^2)}$		12		$\frac{1}{\omega^3}(\omega t - \sin \omega t)$
$1 - \cos \omega t$		$\frac{\omega^2}{s(s^2 + \omega^2)}$		13		$\frac{1}{\omega^2}(1 - \cos \omega t)$
$\sin \omega t - \omega t \cos \omega t$		$\frac{2\omega^3}{(s^2 + \omega^2)^2}$		14		$\frac{1}{2\omega^3}(\sin \omega t - \omega t \cos \omega t)$
$t \sin \omega t$		$\frac{2\omega s}{(s^2 + \omega^2)^2}$		15		$\frac{t}{2\omega} \sin \omega t$
$\sin \omega t + \omega t \cos \omega t$		$\frac{2\omega s^2}{(s^2 + \omega^2)^2}$		16		$\frac{1}{2\omega}(\sin \omega t + \omega t \cos \omega t)$
$\cos at - \cos bt$		$\frac{(b^2 - a^2)s}{(s^2 + a^2)(s^2 + b^2)}$		17		$\frac{1}{b^2 - a^2}(\cos at - \cos bt)$
$(\sin kt \cosh kt - \cos kt \sinh kt)$		$\frac{4k^3}{s^4 + 4k^4}$		18		$\frac{1}{4k^3}(\sin kt \cosh kt - \cos kt \sinh kt)$
$\sin kt \sinh kt$		$\frac{2k^2 s}{s^4 + 4k^4}$		19		$\frac{1}{2k^2} \sin kt \sinh kt$
$\sinh kt - \sin kt$		$\frac{2k^3}{s^4 + k^4}$		20		$\frac{1}{2k^3}(\sinh kt - \sin kt)$
$\cosh kt - \cos kt$		$\frac{2k^2 s}{s^4 + k^4}$		21		$\frac{1}{2k^2}(\cosh kt - \cos kt)$
$u(t-a)$		$\frac{1}{s}e^{-as}$		22		$u(t-a)$
$\delta(t-a)$		$e^{-as}$		23		$\delta(t-a)$