Foredrag[*] om matematisk modellering - med inspirasjon fra heftet «Matematisk Modellbygging», andre utgåve av Leiv Storesletten og Olav Nygaard

Jostein Trondal

6. april 2006[†]

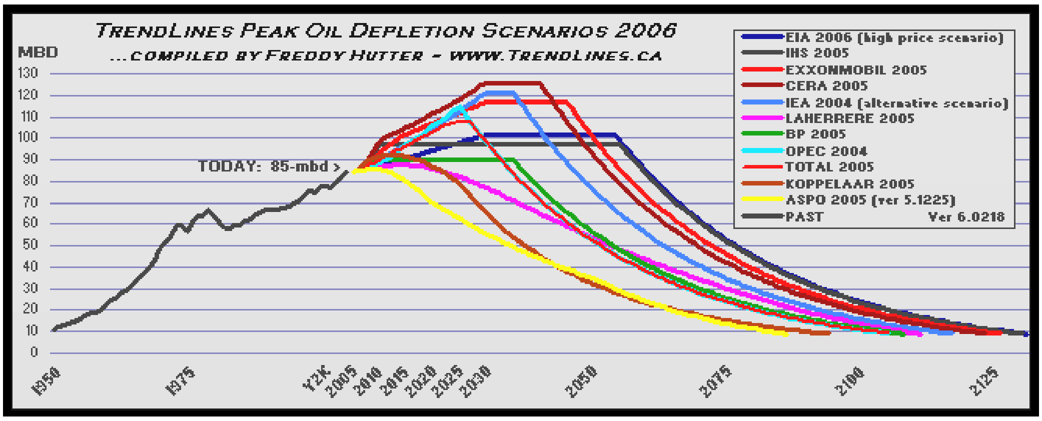
[*]Ligger også på trondal.com/modellering/vekst.pdf

[†]Foredraget ble holdt på «Katta» - Kristiansand Katedralskole i valgfag diff. likn.

Matematisk modellering

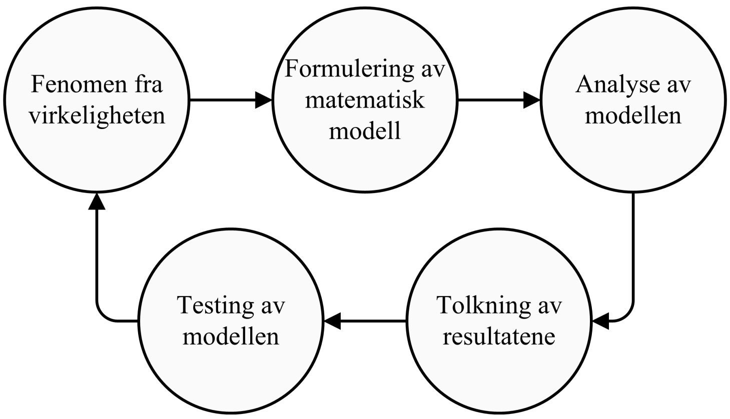
- Matematisk tankebygning for å analysere et problem i et annet fag
- Fysikk, økonomi, økologi, informatikk, astronomi, geofysikk, kjemi, ...
- Matematiske modeller har vært grunnlaget og drivkraften i utviklingen av alle disse fagene fra midten av 1600-tallet

Eksempel - «peak oil»-teorien



Kilde: www.trendlines.ca

Modelleringsprosessen



Denne foredraget går inn på

- Differensiallikninger
- Økologi (befolkningsvekst)
- Eksponentiell vekst (Malthus' modell)
- Logistisk vekst (Verhulsts modell)
- Generalisering av Verhulsts modell

Økologi

- Læren om samspillet i naturen
- Individ, Populasjon, Samfunn, Økosystem
- Simulering vs. kvalitative modeller

Vekst i populasjoner

N brukes for å beskrive antall individer i populasjonen.
N er en funksjon av tiden; $N = N(t)$.
Vi antar at N er kontinuerlig og tilstrekkelig deriverbar.

Vekstraten til en populasjon i et økosystem er i utgangspunktet bestemt av fire faktorer: Fødsel, død, innvandring og utvandring:

$$\frac{dN}{dt} = B - D + I - E \tag{1}$$

Disse faktorene påvirkes av alderssammensetning, tilgang på mat og plass, fysiske og kjemiske forhold i omgivelsene, rovdyr, parasitter, ...

Den enkleste typen modell for populasjonsvekst får vi ved å anta at vekstraten til populasjonen i hvert tidspunkt er gitt som funksjon av størrelsen på populasjonen i samme tidspunkt;

$$\frac{dN}{dt} = f(N) \tag{2}$$

Den *spesifikke vekstraten*

$$s(N) = \frac{1}{N}\frac{dN}{dt} \tag{3}$$

Er et mål for det enkelte individs gjennomsnittlige tilskudd til populasjonsveksten

Eksponentiell vekst - Malthus' modell

Forutsetning: Den spesifikke vekstraten er konstant. Dette gir:

$$\frac{dN}{dt} = rN, \qquad r = \text{konstant} \qquad \text{(Malthus' lov)} \tag{4}$$

Oppgave 1: Vis at startkravet $N(0) = N_0$ gir løsningen $N(t) = N_0 e^{rt}$
Oppgave 2: Hva skjer med $N(t)$ når $t \to \infty$?
Oppgave 3: Skisser noen vekstkurver for ulike verdier av r.

Logistisk vekst - Verhulsts modell

En mer realistisk modell for befolkningsvekst kan lages ved å innføre en øvre grense $K > 0$ for den populasjonen omgivelsene kan livnære. K kalles gjerne *bærekapasiteten*. En ny veksthypotese der denne faktoren tas hensyn til kan da formuleres, for eksempel slik: Den spesifikke vekstraten er proporsjonal med det *«ledige livsrom»* $K - N$. Dette gir:

$$\frac{1}{N}\frac{dN}{dt} = \frac{r}{K}(K - N) \tag{5}$$

$$\Updownarrow$$

$$\frac{dN}{dt} = rN(1 - \frac{N}{K}) \qquad \text{(Verhulsts lov)} \tag{6}$$

Oppgave 4: Hva skjer med likning (6) når $N \ll K$?

Likning (6) er en separerbar differensiallikning som kan løses med standard metoder:

$$
\begin{aligned}
\frac{dN}{dt} &= rN(1-\frac{N}{K}) \\
\frac{1}{N(1-\frac{N}{K})}dN &= rdt \\
\frac{K}{N(K-N)}dN &= rdt
\end{aligned}
$$

Delbrøksoppspalting av $\frac{K}{N(K-N)}$:

$$
\begin{aligned}
\frac{K}{N(K-N)} &= \frac{a}{N}+\frac{b}{(K-N)} \\
\frac{K}{N(K-N)} &= \frac{a(K-N)}{N(K-N)}+\frac{bN}{N(K-N)} \\
\frac{K}{N(K-N)} &= \frac{aK+(b-a)N}{N(K-N)} \Rightarrow {\scriptstyle a=1 \atop \scriptstyle b=1} \\
\Rightarrow \frac{K}{N(K-N)} &= \frac{1}{N}+\frac{1}{(K-N)}
\end{aligned}
$$

Dette gir:

$$
\begin{aligned}
\frac{K}{N(K-N)}dN &= \left(\frac{1}{N}+\frac{1}{(K-N)}\right)dN = rdt \\
\int \frac{1}{N}dN + \int \frac{1}{(K-N)}dN &= \int rdt \\
\ln N - \ln|K-N| &= \ln\left|\frac{N}{K-N}\right| = rt + c_1 \\
e^{\ln\left|\frac{N}{K-N}\right|} &= e^{rt+c_1} \\
\left|\frac{N}{K-N}\right| &= e^{c_1}e^{rt} \\
\frac{N}{K-N} &= \pm e^{c_1}e^{rt} \\
\frac{N}{K-N} &= Ce^{rt}
\end{aligned}
$$

Startkravet $N(0) = N_0 > 0$ gir:

$$\begin{aligned} C &= \frac{N_0}{K - N_0} \\ \Rightarrow \frac{N}{K-N} &= \frac{N_0}{K - N_0} e^{rt} \end{aligned} \tag{7}$$

Denne likningen kan nå løses m.h.p. N og vi får:

$$N(t) = \frac{K}{1 + (K/N_0 - 1)e^{-rt}} \qquad \text{for } t \geq 0 \tag{8}$$

Og er en såkalt *logistisk vekst*.

Oppgave 5: Hva skjer med $N(t)$ når $t \to \infty$?
Oppgave 6: Hva skjer med $N(t)$ når $K \to \infty$?
Oppgave 7: Skisser noen vekstkurver for ulike verdier av N_0.

Verhulsts generaliserte modell

I Verhulsts modell antar man at den spesifikke vekstraten er størst når bestanden er nær null og minker jevnt med økende bestand. I virkeligheten derimot, vil bestander dø ut når de kommer under en viss kritisk verdi $H > 0$. H er da den minimale levedyktige bestanden. Verhulsts modell kan utvides for å ta hensyn til dette ved å anta følgende hypotese:

$$\frac{dN}{dt} = k(N - H)(K - N) \qquad \text{(Verhulsts generaliserte lov)} \tag{9}$$

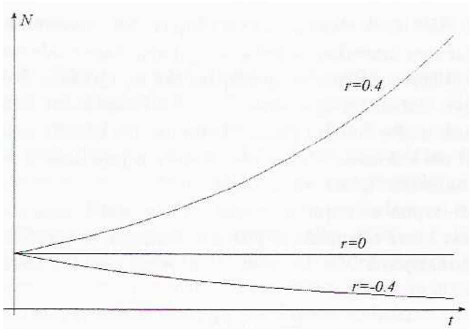
der H er minimal levedyktig bestand, K er bærekapasiteten og k er en konstant. Det følger fra (9) at vekstraten er positiv når $H < N < K$ og er negativ når $N < H$ eller $N > K$. Med startkravet $N(0) = N_0$ får vi løsningen

$$N(t) = H + \frac{K - H}{1 + [(K - N_0)/(N_0 - H)]\, e^{-k(K-H)t}} \tag{10}$$

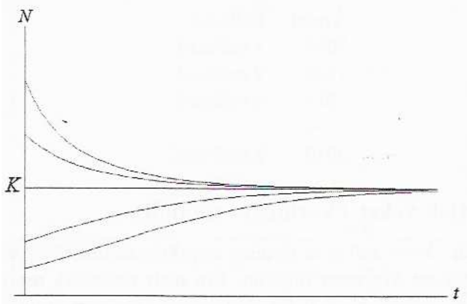
Oppgave 8: Hva skjer med $N(t)$ når $t \to \infty$ og $N_0 > H$?
Oppgave 9: Hva skjer med $N(t)$ når $t \to \infty$ og $0 < N_0 < H$?
Oppgave 10: Skisser noen vekstkurver for ulike verdier av N_0.

Fasit

Oppgave 2: $N(t) \to \infty$ når $t \to \infty$.
Oppgave 3: Skisse av vekstkurver i Malthus' modell:



Oppgave 4: (6) $\approx$ (4) når $N \ll K$.
Oppgave 5: $N(t) \to K$ når $t \to \infty$.
Oppgave 6: $N(t) \to N_0 e^{rt}$ når $K \to \infty$.
Oppgave 7: Skisse av vekstkurver i Verhulsts modell:



Oppgave 8: $N(t) \to K$ når $t \to \infty$ og $N_0 > H$.
Oppgave 9: $N(t) \to -\infty$ når $t \to \infty$ og $0 < N_0 < H$.
Oppgave 10: Skisse av vekstkurver i Verhulsts generaliserte modell: